抽象空间常微分方程

郭大钧　孙经先　著

山东科学技术出版社

抽象空间常微分方程
郭大钧　孙经先　著
*
山东科学技术出版社出版
（济南市玉函路）
山东省新华书店发行
山东新华印刷厂印刷
*
850×1168毫米32开本　9.375印张　201千字
1989年6月第1版　1989年5月第1次印刷
印数：1—1,300
ISBN 7-5331-0491-9/O·31
定价 6.05 元

“泰山科技专著出版基金”顾问、评审委员会、编辑委员会

顾　　问　宋木文　伍　杰　苗枫林

评审委员会（以姓氏笔画为序）

卢良恕　吴阶平　杨　乐　何祚庥
罗沛霖　高景德　唐敖庆　蔡景峰
戴念慈

编辑委员会

主任委员　杜秀明　石洪印

副主任委员　梁　衡　邓慧方　王为珍

委　　员（以姓氏笔画为序）

邓慧方　王为珍　卢良恕　石洪印
刘韶明　吴阶平　杨　乐　何祚庥
杜秀明　罗沛霖　林凤瑞　唐敖庆
高景德　梁　衡　梁柏龄　蔡景峰
戴念慈

我们的希望(代序)

进行现代化建设必须依靠科学技术。作为科学技术载体的专著，正肩负着这一伟大的历史使命。科技专著面向社会，广泛传播科学技术知识，培养专业人才，推动科学技术进步，对促进我国现代化建设具有重大意义。它所产生的巨大社会效益和潜在的经济效益是难以估量的。

基于这种使命感，自1988年起，山东科学技术出版社设“泰山科技专著出版基金”，成立科技专著评审委员会，在国内广泛征求科技专著，每年补贴出版一批经评选的科技著作。这一创举已在社会上引起了很大反响。

但是，设基金补助科技专著出版毕竟是一件新生事物，也是出版事业的一项改革。它不仅需要在实践中不断总结经验，逐步予以完善；同时，也更需要社会上有关方面的大力扶植，以及学术界和广大读者的热情支持。

我们希望，通过这一工作，高水平的科技专著能够及早问世，充分显示它们的价值，发挥科学技术作为生产力的作用，不断推动社会主义现代化建设的发展。愿“基金”支持出版的著作如泰山一样，耸立于当代学术之林。

泰山科技专著评审委员会

1989年3月

前　言

Banach 空间中的常微分方程理论是近二三十年发展起来的一个新的数学分支，它把常微分方程理论和泛函分析理论结合起来，利用泛函分析方法研究Banach空间中的常微分方程。它的理论在无穷常微分方程组、临界点理论、偏微分方程、不动点定理等多方面都有广泛的应用。特别是，临界点理论中常用的最速下降流线，即是以Banach 空间常微分方程理论作基础。由于它的重要性，又比较新，故被列为我国自然科学基金重点资助的项目之一。

在我国，研究Banach 空间常微分方程理论的人很少，到目前为止，还没有出版过一本这方面的专著。1985年，在第五届全国非线性泛函分析会议上，我和孙经先副教授合作了《Banach空间中的常微分方程理论》综合报告，引起了许多人的兴趣。1985年至1987年，我赴美国Texas 大学 Arlington 分校与美国这一领域的著名数学家 V·Lakshmikantham 教授合作，做了一些研究工作。孙经先副教授在国内对 Banach 空间常微分方程及其在临界点理论的应用方面做了一些工作。现将国外一些著名数学家在这一领域中所获的结果，加上我们自己做的工作，写成这本书，介绍给国内读者。本书显然可作为综合性大学和高等师范院校有关专业的研究生教材，也可供有关

教师和科技工作者进行科研时参考。

本书在写作过程中，得到了国家自然科学基金和国家教委博士点基金的资助，特致谢意。

限于作者水平，书中不妥、错误之处在所难免，敬请读者批评指正。

郭大钧

1988年7月28日

于山东大学南院

目　录

第一章　预备知识

本章属于预备知识，介绍后面要用到的若干基本概念和结论，包括非紧性测度、中值定理、半内积等.

1.1　非紧性测度

定义1.1.1　设E是实 Banach 空间，S是E中有界集. 令

$\alpha(S)=\inf\{\delta>0\ |S$可表为有限个集的并：$S=\bigcup_{i=1}^{m}S_i$，使每个$S_i$的直径$d(S_i)$都$\leqslant\delta\}$. 显然，$0\leqslant\alpha(S)<+\infty$. $\alpha(S)$ 叫做S的**非紧性测度**（按Kuratowski意义）.

定理1.1.1　非紧性测度具有下列性质（S，T表E 中有界集，a是实数）：

（i）$\alpha(S)=0\Longleftrightarrow S$是相对紧集；

(ii) $S\subset T\Rightarrow\alpha(S)\leqslant\alpha(T)$；

(iii) $\alpha(\overline{S})=\alpha(S)$；

(iv) $\alpha(S\cup T)=\max\{\alpha(S),\alpha(T)\}$；

(v) $\alpha(aS)=|a|\alpha(S)$，其中$aS=\{x=az\,|\,z\in S\}$；

(vi) $\alpha(S+T)\leqslant\alpha(S)+\alpha(T)$，其中 $S+T=\{x=y+z\,|\,y\in S,\ z\in T\}$；

(vii) $\alpha(\overline{co}S)=\alpha(S)$；

(viii)α关于Hausdorff距离

$$d_H(S_1,S_2)=\max\{\sup_{x\in S_1}\rho(x,S_2),\sup_{x\in S_2}\rho(x,S_1)\}$$

（$\rho(x,S_2)$表x到集S_2的距离）是一致连续的，即：对于任给的$\varepsilon>0$，必有$\delta=\delta(\varepsilon)>0$存在，使对于$E$中任二有界集$S_1$，$S_2$，只要$d_H(S_1,S_2)<\delta$，就有

$$|\alpha(S_1)-\alpha(S_2)|<\varepsilon. \tag{1.1.1}$$

证 (i)～(vii)的证明见郭大钧〔1〕. 下证（viii）. 任给$\varepsilon>0$. 取$\delta=\frac{\varepsilon}{3}$. 对于$E$中任二满足$d_H(S_1,S_2)<\delta$的有界集$S_1$与$S_2$，设$S_1=\bigcup_{i=1}^{m}T_i$，$d(T_i)<\alpha(S_1)+\frac{\varepsilon}{3}(i=1,2,\cdots,m)$，并令

$$Z_i=\{y\in S_2\,|\,\exists x\in T_i,\rho(x,y)=\|x-y\|<\delta\}$$
$$(i=1,2,\cdots,m).$$

显然 $d(Z_i)\leqslant 2\delta+d(T_i)<\alpha(S_1)+\varepsilon\quad(i=1,2,\cdots,m)$.

又，由$d_H(S_1,S_2)<\delta$易知$S_2=\bigcup_{i=1}^{m}Z_i$. 故得

$$\alpha(S_2)<\alpha(S_1)+\varepsilon. \tag{1.1.2}$$

同理可证

$$\alpha(S_1)<\alpha(S_2)+\varepsilon. \tag{1.1.3}$$

由(1.1.2)和(1.1.3)两式，得

$$|\alpha(S_1)-\alpha(S_2)|<\varepsilon. \tag{1.1.4}$$

一致连续性获证. □

本节以下，$I=[a,b]$恒表实数轴上有限闭区间，$C[I,E]$表从I到E的抽象连续函数空间，其范数为$\|x\|=\max_{t\in I}\|x(t)\|$. 对$H\subset C[I,E]$，我们记

$$H(t)=\{x(t)\,|\,x\in H\}\subset E, \tag{1.1.5}$$

$$H(I)=\{x(t)\mid x\in H,\ t\in I\}=\bigcup_{t\in I}H(t)\subset E. \qquad (1.1.6)$$

定理1.1.2 设$H\subset C[I, E]$是有界的，等度连续的，则 (a) $\alpha(H)=\alpha(H(I))$，(b) $\alpha(H(I))=\max\limits_{t\in I}\alpha(H(t))$.

证 先证(a)。我们证明$\alpha(H(I))\leqslant\alpha(H)$，任给$\varepsilon>0$。取$H=\bigcup\limits_{i=1}^{m}H_i$使$d(H_i)<\alpha(H)+\frac{\varepsilon}{2}(i=1, 2, \cdots, m)$。由$H$的等度连续性，可将$I$分成有限个小闭区间$I_j(j=1, 2, \cdots, n)$使

$$\|x(t)-x(t')\|<\frac{\varepsilon}{2},\ \forall x\in H, t, t'\in I_j,\ j=1, 2, \cdots, n. \qquad (1.1.7)$$

现令$S_{ij}=\{x(t)\mid x\in H_i,\ t\in I_j\}$（$i=1, 2, \cdots, m$；$j=1, 2, \cdots, n$）。显然 $H(I)=\bigcup\limits_{i=1}^{m}\bigcup\limits_{j=1}^{n}S_{ij}$。又，当 $x, y\in H_i$，$t, t'\in I_j$ 时，由(1.1.7)式，我们有

$$\|x(t)-y(t')\|\leqslant\|x(t)-y(t)\|+\|y(t)-y(t')\|$$
$$\leqslant d(H_i)+\frac{\varepsilon}{2}<\alpha(H)+\varepsilon,$$

故 $\alpha(H(I))\leqslant\alpha(H)+\varepsilon$.

由$\varepsilon>0$的任意性，即得$\alpha(H(I))\leqslant\alpha(H)$。下证相反的不等式$\alpha(H)\leqslant\alpha(H(I))$。任给$\varepsilon>0$。由$H$的等度连续性知，$I$可被有限个邻域$V(t_i)(i=1, 2, \cdots, m)$所覆盖，使得$\|x(t)-x(t_i)\|<\varepsilon$对任何$x\in H, t\in V(t_i)$成立。又，存在分解$H(I)=\bigcup\limits_{j=1}^{m}B_j$使得$d(B_j)<\alpha(H(I))+\varepsilon$，$j=1, 2, \cdots, m$。用$P$表从$\{1, 2, \cdots, n\}\subset N$到$\{1, 2, \cdots, m\}\subset N$的所有映象$i\to\mu(i)$的全体，这里$N$表正整数集。显然，$P$是有限集。令$L_\mu=\{x\in H\mid x(t_i)\in B_{\mu(i)},\ i=1, 2, \cdots, n\}$，很明显，$H=\bigcup\limits_{\mu\in P}L_\mu$。对于任何$x$，

$y\in L_\mu$及$t\in I$，t必属于某$V(t_i)$，从而

$$\|x(t)-x(t_i)\|<\varepsilon,\ \|y(t)-y(t_i)\|<\varepsilon,$$
$$\|x(t_i)-y(t_i)\|<\alpha(H(I))+\varepsilon.$$

于是

$$\|x(t)-y(t)\|\leqslant\|x(t)-x(t_i)\|+\|x(t_i)-y(t_i)\| \\ +\|y(t_i)-y(t)\|<\alpha(H(I))+3\varepsilon. \tag{1.1.8}$$

由此可知$d(L_\mu)\leqslant\alpha(H(I))+3\varepsilon$，$\alpha(H)\leqslant\alpha(H(I))+3\varepsilon$。由$\varepsilon>0$的任意性，得$\alpha(H)\leqslant\alpha(H(I))$.结论($a$)获证.下证($b$)。首先注意，由$H$的等度连续性易知，当$t\to t_0(t,\ t_0\in I)$时，必$d_H(H(t),\ H(t_0))\to 0$，从而根据定理1.1.1(viii)知$\alpha(H(t))\to\alpha(H(t_0))$，故$\alpha(H(t))$是$t$的连续函数，因此，$\max\limits_{t\in I}\alpha(H(t))$存在。

由于对任何$t\in I$有，$H(t)\subset H(I)$，$\alpha(H(t))\leqslant\alpha(H(I))$，从而$\max\limits_{t\in I}\alpha(H(t))\leqslant\alpha(H(I))$。再证相反的不等式。任给$\varepsilon>0$。由$H$的等度连续性，$I$可被有限个邻域$V(t_i)$ ($i=1,2,\cdots,n$) 所覆盖，使得$\|x(t)-x(t_i)\|<\varepsilon$对任何$x\in H$，$t\in V(t_i)$成立。又，易知：对任何$i=1,2,\cdots,n$，存在分解$H=\bigcup\limits_{j=1}^{m}H_j^{(i)}$($m$不随$i$而变)，使得$H(t_i)=\bigcup\limits_{j=1}^{m}H_j^{(i)}(t_i)$，并且

$$d(H_j^{(i)}(t_i))<\alpha(H(t_i))+\varepsilon\quad(j=1,2,\cdots,m). \tag{1.1.9}$$

令

$$B_{ij}=H_j^{(i)}(V(t_i)),\ (i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m).$$

显然，$H(I)=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\bigcup\limits_{j=1}^{m}B_{ij}$。对$x,y\in H_j^{(i)}$，$t$，$t'\in V(t_i)$，我们有

$$\|x(t)-y(t')\|\leqslant\|x(t)-x(t_i)\|+\|x(t_i)-y(t_i)\| \\ +\|y(t_i)-y(t')\|<2\varepsilon+d(H_j^{(i)}(t_i)).$$

于是，注意到(1.1.9)式，知

$$d(B_{ij})<\alpha(H(t_i))+3\varepsilon\leqslant\max_{t\in I}\alpha(H(t))+3\varepsilon.$$

故得

$$\alpha(H(I))<\max_{t\in I}\alpha(H(t))+3\varepsilon.$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性，即得 $\alpha(H(I))\leqslant\max_{t\in I}\alpha(H(t))$. (b) 获证。□

系1.1.1 设$D\subset E$有界，映象 $f: I\times D\to E$有界且一致连续。则

$$\alpha(f(I\times B))=\max_{t\in I}\alpha(f(t,B)),\quad\forall B\subset D. \quad (1.1.10)$$

证 令$\varphi_x(t)=f(t,x)$，$H=\{\varphi_x\,|\,x\in B\}$. 则$H\subset C[I, E]$. 由$f$的有界性与一致连续性易知，$H$ 是有界的、等度连续的；从而，根据定理1.1.2(b)知，

$$\alpha(H(I))=\max_{t\in I}\alpha(H(t)),$$

此即(1.1.10)式。□

定理1.1.3 (Ascoli-Arzela) 集$H\subset C[I, E]$相对紧的充分必要条件是：H是等度连续的，并且对任何 $t\in I$，集 $H(t)$ 是E中的相对紧集。

证 必要性：设H在 $C[I, E]$ 中相对紧。显然，对任何 $t\in I$，$H(t)$是E中相对紧集。下证 H 的等度连续性。任给 $\varepsilon>0$. 由Hausdorff定理，存在$\{x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_m\}\subset H$，$\{x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_m\}$成为$H$ 的$\frac{\varepsilon}{3}$—网。由 $x_i(t)$在I上的一致连续性知，存在$\delta_i>0$，使当$|t-t'|<\delta_i$ $(t, t'\in I)$时恒有$\|x_i(t)-x_i(t')\|<\frac{\varepsilon}{3}$ $(i=1,2,\cdots,m)$. 现令$\delta=\min\{\delta_1,\cdots,\delta_m\}$. 于是，对任何$x\in H$，存在$x_i$使$\|x-x_i\|=\max_{t\in I}\|x(t)-x_i(t)\|<\frac{\varepsilon}{3}$.

当$|t-t'|<\delta$ $(t,t'\in I)$时，我们有

$$\|x(t)-x(t')\|\leqslant\|x(t)-x_i(t)\|+\|x_i(t)-x_i(t')\|$$
$$+\|x_i(t')-x(t')\|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

故H的等度连续性获证。

充分性：设H是等度连续的，并且对任何$t\in I$，$H(t)$是E中相对紧集。由此易知，H是有界的，并根据定理1.1.1（i）知

$$\alpha(H(t))=0,\ \forall t\in I. \tag{1.1.11}$$

现根据定理1.1.2，我们有

$$\alpha(H)=\max_{t\in I}\alpha(I(t)). \tag{1.1.12}$$

于是，由(1.1.11)式和(1.1.12)式得$\alpha(H)=0$，由此，再根据定理1.1.1(i)即知H是$C[I,E]$中的相对紧集。□

1.2 中值定理与比较定理

本节中，$I=[a,b]$，E表实Banach空间。

定理1.2.1 （中值定理）设$x\in C[I,E]$，且除去至多可数集$\Gamma\subset[a,b]$外，当$t\in[a,b]\backslash\Gamma$时，$x(t)$右可微（即右导数$x'_+(t)$存在）.则

$$x(b)-x(a)\in(b-a)\overline{co}(\{x'_+(t)\,|\,t\in[a,b]\backslash\Gamma\}). \tag{1.2.1}$$

证 记$\Gamma=\{p_k;\ k=1,2,3,\cdots\}$，$D=\{x'_+(t)\,|\,t\in[a,b]\backslash\Gamma\}$. 任给$\varepsilon>0$. 令

$$T=\{t\in[a,b]\,|\,d(x(t)-x(a),(t-a)coD)$$
$$\leqslant(t-a)\varepsilon+\varepsilon\sum_{p_k<t}2^{-k}\},$$

其中$d(\cdot,\cdot)$表点到集的距离．显然$a\in T$，故$T\neq\phi$．令$\lambda=\sup T$．下证$\lambda\in T$．事实上，设$t_n\in I$，$t_n\to\lambda$ $(t_n\leqslant\lambda)$．于是，存在$\xi_n\in coD$使

$$\|x(t_n)-x(a)-(t_n-a)\xi_n\|<(t_n-a)\varepsilon+\varepsilon\sum_{p_k<t_n}2^{-k}+\frac{1}{n}$$

$$\leqslant(\lambda-a)\varepsilon+\varepsilon\sum_{p_k<\lambda}2^{-k}+\frac{1}{n}\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

(1.2.2)

由此，注意到$\{\|x(t_n)\|\}$的有界性，即知存在$M>0$使

$$\|\xi_n\|\leqslant M\quad(n=1,2,3,\cdots).\tag{1.2.3}$$

由(1.2.2)式和(1.2.3)式，知

$$d(x(\lambda)-x(a),(\lambda-a)coD)\leqslant\|x(\lambda)-x(a)-(\lambda-a)\xi_n\|$$

$$\leqslant\|x(t_n)-x(a)-(t_n-a)\xi_n\|+\|x(\lambda)-x(t_n)\|+(\lambda-t_n)\|\xi_n\|$$

$$<(\lambda-a)\varepsilon+\varepsilon\sum_{p_k<\lambda}2^{-k}+\frac{1}{n}+\|x(\lambda)-x(t_n)\|+M(\lambda-t_n),$$

$$(n=1,2,3,\cdots).$$

令$n\to\infty$取极限，得

$$d(x(\lambda)-x(a),(\lambda-a)coD)\leqslant(\lambda-a)\varepsilon+\varepsilon\sum_{p_k<\lambda}2^{-k},$$

(1.2.4)

故$\lambda\in T$．再证$\lambda=b$．如不然，$\lambda<b$．若$\lambda\in\Gamma$，则$\lambda=p_m$．由(1.2.4)式，可取$\xi\in coD$使

$$\|x(\lambda)-x(a)-(\lambda-a)\xi\|<(\lambda-a)\varepsilon+\varepsilon\sum_{p_k<\lambda}2^{-k}+\frac{\varepsilon 2^{-m}}{3}.$$

再取$\delta>0$，使$\lambda+\delta<b$且

$$\|x(\lambda+\delta)-x(\lambda)\|<\frac{\varepsilon 2^{-m}}{3},\quad\delta\|\xi\|<\frac{\varepsilon 2^{-m}}{3}.$$

于是

$$d(x(\lambda+\delta)-x(a),(\lambda+\delta-a)coD)$$
$$\leqslant\|x(\lambda+\delta)-x(a)-(\lambda+\delta-a)\xi\|$$
$$\leqslant\|x(\lambda)-x(a)-(\lambda-a)\xi\|+\|x(\lambda+\delta)-x(\lambda)\|+\delta\|\xi\|$$
$$<(\lambda-a)\varepsilon+\varepsilon\sum_{p_k<\lambda}2^{-k}+\varepsilon 2^{-m}$$
$$<(\lambda+\delta-a)\varepsilon+\varepsilon\sum_{p_k<\lambda+\delta}2^{-k},$$

从而$\lambda+\delta\in T$，此与$\lambda=\sup T$矛盾．若$\lambda\overline{\in}\Gamma$，则$x'_+(\lambda)$ 存在且$x'_+(\lambda)\in coD$。取$\delta>0$使$\lambda+\delta<b$且

$$\|x(\lambda+\delta)-x(\lambda)-\delta x'_+(\lambda)\|<\frac{\delta\varepsilon}{2}. \tag{1.2.5}$$

又，由(1.2.4)式，可取$\xi\in coD$使

$$\|x(\lambda)-x(a)-(\lambda-a)\xi\|<(\lambda-a)\varepsilon+\varepsilon\sum_{p_k<\lambda}2^{-k}+\frac{\delta\varepsilon}{2}. \tag{1.2.6}$$

于是，由(1.2.5)式和(1.2.6)式，得

$$d(x(\lambda+\delta)-x(a),(\lambda+\delta-a)coD)$$
$$\leqslant\|x(\lambda+\delta)-x(a)-(\lambda+\delta-a)\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{\delta}{\lambda+\delta-a}\ x'_+(\lambda)+\ \frac{\lambda-a}{\lambda+\delta-a}\xi\right)\|$$
$$=\|x(\lambda+\delta)-x(a)-\delta x'_+(\lambda)-(\lambda-a)\xi\|$$
$$\leqslant\|x(\lambda+\delta)-x(\lambda)-\delta x'_+(\lambda)\|+\|x(\lambda)-x(a)-(\lambda-a)\xi\|$$
$$<\frac{\delta\varepsilon}{2}+(\lambda-a)\varepsilon+\varepsilon\sum_{p_k<\lambda}2^{-k}+\frac{\delta\varepsilon}{2}$$
$$\leqslant(\lambda+\delta-a)\varepsilon+\varepsilon\sum_{p_k<\lambda+\delta}2^{-k},$$

故$\lambda+\delta\in T$，也与$\lambda=\sup T$矛盾．由此可知，$\lambda=b$。

于是

$$d(x(b)-x(a),(b-a)coD)\leqslant(b-a)\varepsilon+\varepsilon.$$

再注意到$\varepsilon>0$的任意性，即得(1.2.1)式。□

系1.2.1 设$x\in C[I, E]$，且除去至多可数集$\Gamma\subset[a, b]$外，当$t\in[a,b]\backslash\Gamma$时$x(t)$右可微。若存在$M>0$，使$\|x'_+(t)\|\leqslant M$，$\forall t\in[a,b]\backslash\Gamma$，则

$$\|x(b)-x(a)\|\leqslant M(b-a); \tag{1.2.7}$$

特别，若 $x'_+(t)=\theta$（θ表E的零元素），$\forall t\in[a, b]\backslash\Gamma$，则$x(t)$是常元素，即$x(t)\equiv x_0\in E$，$\forall t\in[a,b]$。

系1.2.2 设$x\in C[I, E]$，且除去至多可数集$\Gamma\subset[a, b]\backslash\Gamma$外，当$t\in[a,b]\backslash\Gamma$时$x(t)$右可微，又设$P$是$E$中某锥，从而产生$E$中半序$\leqslant$（关于锥和由锥导出的半序的详细讨论，见郭大钧[1]）。则x是$[a,b]$上增函数（即$a\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant b\Rightarrow x(t_1)\leqslant x(t_2)$）的充分必要条件是$x'_+(t)\geqslant\theta$，$\forall t\in[a,b]\backslash\Gamma$。

证 必要性显然。下证充分性。设$x'_+(t)\geqslant\theta$，$\forall t\in[a, b]\backslash\Gamma$。对$[t_1,t_2]$应用定理1.2.1，知

$$x(t_2)-x(t_1)\in(t_2-t_1)\overline{co}(\{x'_+(t)\mid t\in[t_1,t_2]\backslash\Gamma\}).$$

由于$\overline{co}(\{x'_+(t)\mid t\in[t_1, t_2]\backslash\Gamma\})\subset P$，故$x(t_2)-x(t_1)\in P$，即 $x(t_2)\geqslant x(t_1)$。□

对于左可微的情形，类似的结论成立，即有下面的

定理1.2.2（中值定理） 设$x\in C[I, E]$，且除去至多可数集$\Gamma\subset[a, b]$外，当$t\in[a, b]\backslash\Gamma$时$x(t)$左可微（即左导数$x'_-(t)$存在）。则

$$x(b)-x(a)\in\overline{co}(\{x'_-(t)\mid t\in[a,b]\backslash\Gamma\}). \tag{1.2.8}$$

系1.2.3 设$x\in C[I,E]$，且除去至多可数集$\Gamma\subset[a, b]$外，当$t\in[a, b]\backslash\Gamma$时$x(t)$左可微。若存在$M>0$使$\|x'_-(t)\|\leqslant M$，$\forall t\in[a,b]\backslash\Gamma$，则(1.2.7)式成立。特别，若$x_-'(t)=\theta$，$\forall t\in[a,b]\backslash\Gamma$，则$x(t)\equiv x_0\in E$，$\forall t\in[a,b]$。

系1.2.4 设$x\in C[I, E]$，且除去至多可数集$\Gamma\subset[a, b]$外，当$t\in[a,b]\setminus\Gamma$时$x(t)$左可微。又设P是E中某锥，则x是$[a,b]$上增函数的充分必要条件是 $x'_-(t)\geqslant\theta$，$\forall t\in[a,b]\setminus\Gamma$。

在区间$I^*=\{-t|t\in I\}=[-b, -a]$上考察函数$x^*(t)=-x(-t)$，即可将定理1.2.2化为定理1.2.1的情形，从而定理1.2.2可从定理1.2.1推出。当然，定理1.2.2也可直接证明，这时只需代替T与$\lambda=\sup T$而考虑$T^*=\{t\in[a, b]|d(x(b)-x(t), (b-t)coD^*)\leqslant(b-t)\varepsilon+\varepsilon\sum\limits_{p_k>t}2^{-k}\}$及$\lambda=\inf T^*$即可，这里$D^*=\{x'_-(t)|t\in[a,b]\setminus\Gamma\}$。

对于普通实函数$x(t)$，我们有四种Dini导数：

$$D^+x(t)=\overline{\lim_{h\to+0}}\frac{x(t+h)-x(t)}{h},$$

$$D_+x(t)=\underline{\lim_{h\to+0}}\frac{x(t+h)-x(t)}{h},$$

$$D^-x(t)=\overline{\lim_{h\to-0}}\frac{x(t+h)-x(t)}{h},$$

$$D_-x(t)=\underline{\lim_{h\to-0}}\frac{x(t+h)-x(t)}{h},$$

参看Lakshmikantham和Leela[1]。仿Martin[1]，我们下面把Dini导数概念推广到在Banach空间取值的抽象函数，并建立与系1.2.2和系1.2.4类似的结果。

设E是实Banach空间，P是E中某锥，从而产生半序$\leqslant$。设x：$(\alpha,\beta)\to E$，$t\in(\alpha,\beta)$。

定义1.2.1 设存在$z\in E$使

$$\overline{\lim_{h\to+0}}\, d\left(\frac{x(t+h)-x(t)}{h}-z,\ P\right)=0, \qquad (1.2.9)$$

则称广义Dini导数$D^+x(t)$满足$D^+x(t)\geqslant z$；若

$$\underline{\lim_{h\to+0}}\, d\left(\frac{x(t+h)-x(t)}{h}-z,\ P\right)=0, \qquad (1.2.10)$$

则称$D_+x(t)\geqslant z$；若

$$\overline{\lim_{h\to-0}}\, d\left(\frac{x(t+h)-x(t)}{h}-z,\ P\right)=0, \qquad (1.2.11)$$

则称$D^-x(t)\geqslant z$；若

$$\underline{\lim_{h\to-0}}\, d\left(\frac{x(t+h)-x(t)}{h}-z,\ P\right)=0, \qquad (1.2.12)$$

则称$D_-x(t)\geqslant z$。

易知，在$E=R^1$，$P=\{x\in R^1 \mid x\geqslant 0\}$的情形，

$$D^+x(t)\geqslant z \Longleftrightarrow \overline{\lim_{h\to+0}}\frac{x(t+h)-x(t)}{h}\geqslant z,$$

$$D_+x(t)\geqslant z \Longleftrightarrow \underline{\lim_{h\to+0}}\frac{x(t+h)-x(t)}{h}\geqslant z,$$

$$D^-x(t)\geqslant z \Longleftrightarrow \overline{\lim_{h\to-0}}\frac{x(t+h)-x(t)}{h}\geqslant z,$$

$$D_-x(t)\geqslant z \Longleftrightarrow \underline{\lim_{h\to-0}}\frac{x(t+h)-x(t)}{h}\geqslant z.$$

因此，广义Dini导数可视为普通Dini导数的推广。

另外，由上述定义易知.

$D_+x(t)\geqslant z\Rightarrow D^+x(t)\geqslant z$；$D_-x(t)\geqslant z\Rightarrow D^-x(t)\geqslant z$；

若$x_+'(t)$存在，则$D_+x(t)\geqslant x_+'(t)$； (1.2.13)

若$x_-'(t)$存在，则$D_-x(t)\geqslant x_-'(t)$。 (1.2.14)

定理1.2.3 设P是E中某锥，$x\in C[I,E]$($I=[a,b]$)。则

$x(t)$是$[a, b]$中增函数的充分必要条件是：除去至多可数集$\Gamma\subset[a,b]$外，有$D^+x(t)\geqslant\theta$，$\forall t\in[a,b]\setminus\Gamma$。

证 必要性显然。下证充分性。设$\Gamma=\{p_k; k=1, 2, 3, \cdots\}$，$D^+x(t)\geqslant\theta$，$\forall t\in[a,b]\setminus\Gamma$。要证$a\leqslant t_1<t_2\leqslant b\Rightarrow x(t_1)\leqslant x(t_2)$。不失一般性，只需就$t_1=a$，$t_2=b$情形证之。任给$\varepsilon>0$。令

$$T=\{t\in[a,b]\,|\,d(x(t)-x(a),P)\leqslant(t-a)\varepsilon+\varepsilon\sum_{p_k<t}2^{-k}\}.$$

显然，$a\in T$，故$T\neq\phi$。令$\lambda=\sup T$。由$x(t)$的连续性，仿定理1.2.1之证，可知$\lambda\in T$。下证$\lambda=b$。如不然，$\lambda<b$。若$\lambda\in\Gamma$，即$\lambda=p_m$，取$\delta>0$使$\lambda+\delta<b$且$\|x(\lambda+\delta)-x(\lambda)\|<\varepsilon 2^{-m}$。于是，

$$\begin{aligned}&d(x(\lambda+\delta)-x(a),P)\\&\leqslant\|x(\lambda+\delta)-x(\lambda)\|+d(x(\lambda)-x(a),P)\\&<\varepsilon 2^{-m}+(\lambda-a)\varepsilon+\varepsilon\sum_{p_k<\lambda}2^{-k}\\&<(\lambda+\delta-a)\varepsilon+\varepsilon\sum_{p_k<\lambda+\delta}2^{-k},\end{aligned}$$

故$\lambda+\delta\in T$，此与$\lambda=\sup T$矛盾。若$\lambda\bar{\in}\Gamma$，由$D^+x(\lambda)\geqslant\theta$知，可取$\eta>0$使$\lambda+\eta<b$且

$$d\left(\frac{x(\lambda+\eta)-x(\lambda)}{\eta},\ P\right)<\frac{\varepsilon}{2},$$

于是，存在$y\in P$使

$$\left\|\frac{x(\lambda+\eta)-x(\lambda)}{\eta}-y\right\|<\varepsilon. \tag{1.2.15}$$

又，取序列$y_n\in P$使

$$d(x(\lambda)-x(a),P)=\lim_{n\to\infty}\|x(\lambda)-x(a)-y_n\|. \tag{1.2.16}$$

注意到$\eta y+y_n\in P$，由(1.2.15)式，得

$$
\begin{aligned}
&d(x(\lambda+\eta)-x(a),P)\\
&\leqslant\|x(\lambda+\eta)-x(a)-(\eta y+y_n)\|\\
&\leqslant\|x(\lambda+\eta)-x(\lambda)-\eta y\|+\|x(\lambda)-x(a)-y_n\|\\
&<\eta\varepsilon+\|x(\lambda)-x(a)-y_n\|,(n=1,2,3,\cdots).
\end{aligned}
$$

令$n\to\infty$取极限，注意(1.2.16)式，得

$$
\begin{aligned}
d(x(\lambda+\eta)-x(a),P)&\leqslant\eta\varepsilon+d(x(\lambda)-x(a),P)\\
&\leqslant\eta\varepsilon+(\lambda-a)\varepsilon+\varepsilon\sum_{p_k<\lambda}2^{-k}\\
&\leqslant(\lambda+\eta-a)\varepsilon+\varepsilon\sum_{p_k<\lambda+\eta}2^{-k}.
\end{aligned}
$$

故$\lambda+\eta\in T$，此也与$\lambda=\sup T$矛盾。于是，$\lambda=b$，

$$
d(x(b)-x(a),P)\leqslant(b-a)\varepsilon+\varepsilon.
$$

由$\varepsilon>0$的任意性，即得$d(x(b)-x(a),P)=0$，故$x(b)-x(a)\in P$，即$x(b)\geqslant x(a)$。□

系1.2.5 设P是E中某锥，$x\in C[I,E]$。则$x(t)$是$[a,b]$中增函数的充分必要条件是：除去至多可数集$\Gamma\subset[a,b]$外，有$D_+x(t)\geqslant\theta$，$\forall t\in[a,b]\backslash\Gamma$。

定理1.2.4 设P是E中某锥，$x\in C[I,E]$。则$x(t)$是$[a,b]$中增函数的充分必要条件是：除去至多可数集$\Gamma\subset[a,b]$外，有$D^-x(t)\geqslant\theta$，$\forall t\in[a,b]\backslash\Gamma$。

证 定理1.2.4的证明与定理1.2.3的证明类似，故从略。我们只指出，这时，代替T，需令$T^*=\{t\in[a,b]\mid d(x(b)-x(t),P)\leqslant(b-t)\varepsilon+\varepsilon\sum_{p_k>t}2^{-k}\}$并考虑$\lambda=\inf T^*$。□

系1.2.6 设P是E中某锥，$x\in C[I,E]$。则$x(t)$是$[a,b]$中增函数的充分必要条件是：除去至多可数集$\Gamma\subset[a,b]$外，有$D_-x(t)\geqslant\theta$，$\forall t\in[a,b]\backslash\Gamma$。

注意，由(1.2.13)式与(1.2.14)式知：系1.2.2可从系

1.2.5直接推出，系1.2.4可从系1.2.6直接推出.

下面我们将要建立本书中经常用到的普通常微分方程中的几个比较定理.

引理1.2.1 设G是R^2中的开集，$g\in C[G, R^1]$. 设v，$w\in C[[t_0,t_0+a], R^1]$，$(t, v(t))\in G$，$(t, w(t))\in G(\forall t\in[t_0, t_0+a])$. 设

$$v(t_0)<w(t_0) \tag{1.2.17}$$

并且对$t\in(t_0,t_0+a)$有

$$D_-v(t)\leqslant g(t,v(t)), \tag{1.2.18}$$

$$D_-w(t)>g(t,w(t)) \tag{1.2.19}$$

则有

$$v(t)<w(t),\quad \forall t\in[t_0,t_0+a). \tag{1.2.20}$$

证 设(1.2.20)式不成立. 令

$$Z=\{t\in[t_0,t_0+a)\,|\,w(t)\leqslant v(t)\},$$

则$Z\neq\phi$. 令$t_1=\inf Z$，则由(1.2.17)式知$t_0<t_1$，并且

$$v(t_1)=w(t_1), \tag{1.2.21}$$

$$v(t)<w(t),\quad t\in[t_0,t_1].$$

于是，当$h<0$，$t_1+h>t_0$时有

$$\frac{v(t_1+h)-v(t_1)}{h}>\frac{w(t_1+h)-w(t_1)}{t},$$

这表明

$$D_-v(t_1)\geqslant D_-w(t_1).$$

利用(1.2.18)和(1.2.19)两式即得

$$g(t_1,v(t_1))>g(t_1,w(t_1)).$$

此与(1.2.21)式矛盾. □

注1.2.1 显然，如果把(1.2.18)和(1.2.19)两式换为

$$D_-v(t)<g(t,v(t))$$

$$D_-w(t)\geqslant g(t,w(t))$$

($\forall t\in(t_0,t_0+a)$)，则引理1.2.1的结论仍然成立。

设$r(t)$是常微分方程初值问题

$$u'=g(t,u),\ u(t_0)=u_0 \tag{1.2.22}$$

($g\in C[G,R^1]$，G是R^2中的某开集，$u_0\in R^1$)定义在$[t_0,t_0+a)$上的解．如果对初值问题(1.2.22)的定义在$[t_0,t_0+a)$上的任何一个解$u(t)$，都有

$$u(t)\leqslant r(t),\ \forall t\in[t_0,t_0+a),$$

则称$r(t)$是初值问题(1.2.22)的最大解．类似地，可以定义最小解的概念。

引理1.2.2 设$g\in C[R_0,R^1]$，其中$R_0=\{(t,u)\in R^2|t_0\leqslant t\leqslant t_0+a,\ |u-u_0|\leqslant b\}$；又设存在$M>0$，使

$$|g(t,u)|\leqslant M,\ \forall (t,u)\in R_0.$$

则初值问题(1.2.22)存在定义在$[t_0,t_0+\alpha]$上的最大解和最小解，其中$\alpha=\min\left\{a,\dfrac{b}{2M+b}\right\}$.

证 令$0<\varepsilon\leqslant\dfrac{b}{2}$，考察

$$u'=g(t,u)+\varepsilon,\ u(t_0)=u_0+\varepsilon, \tag{1.2.23}$$

则根据Cauchy—Peano定理，初值问题(1.2.23)有定义在$[t_0,t_0+\alpha]$上的解$u(t,\varepsilon)$。令$0<\varepsilon_2<\varepsilon_1\leqslant\varepsilon$，则

$$u(t_0,\varepsilon_2)<u(t_0,\varepsilon_1),$$

$$u'(t,\varepsilon_2)=g(t,u(t,\varepsilon_2))+\varepsilon_2,\ \forall t\in[t_0,t_0+\alpha],$$

$$u'(t,\varepsilon_1)=g(t,u(t,\varepsilon_1))+\varepsilon_1$$

$$>g(t,u(t,\varepsilon_1))+\varepsilon_2,\forall t\in[t_0,t_0+\alpha].$$

根据引理1.2.1，有

$$u(t,\varepsilon_2)<u(t,\varepsilon_1),\quad \forall t\in[t_0,t_0+\alpha].$$

现取一串$\{\varepsilon_n\}$，使

$$0<\cdots<\varepsilon_n<\cdots<\varepsilon_2<\varepsilon_1<\varepsilon,$$

$$\varepsilon_n\to 0,$$

则有

$$\cdots<u(t,\varepsilon_n)<\cdots<u(t,\varepsilon_2)<u(t,\varepsilon_1),$$

$$\forall t\in[t_0,t_0+\alpha]. \qquad (1.2.24)$$

由于$\{u(t,\varepsilon_n)\}$是一致有界的等度连续函数族，故由(1.2.24)式知存在$r(t):[t_0,t_0+\alpha]\to R^1$，使对$t\in[t_0,t_0+\alpha]$，一致有

$$\lim_{n\to\infty}u(t,\varepsilon_n)=r(t),$$

显然$r(t_0)=u_0$。由g的一致连续性知对$t\in[t_0,t_0+\alpha]$，一致有

$$\lim_{n\to\infty}g(t,u(t,\varepsilon_n))=g(t,r(t)).$$

注意到$u(t,\varepsilon_n)$满足

$$u(t,\varepsilon_n)=u_0+\varepsilon_n+\int_{t_0}^{t}g(s,u(s,\varepsilon_n))ds,$$

在该式中令$n\to\infty$，即知$r(t)$是初值问题（1.2.22）的解。下证$r(t)$是初值问题(1.2.22)的最大解。事实上，设$u(t)$是初值问题(1.2.22)定义在$[t_0,t_0+\alpha]$上的任一解，则

$$u(t_0)=u_0<u_0+\varepsilon_n=u(t_0,\varepsilon_n),$$

$$u'(t)<g(t,u(t))+\varepsilon_n$$

$$u'(t,\varepsilon_n)=g(t,u(t,\varepsilon_n))+\varepsilon_n.$$

根据注1.2.1，有

$$u(t)<u(t,\varepsilon_n),\quad \forall t\in[t_0,t_0+\alpha].$$

令$n\to\infty$，即得$u(t)\leqslant r(t)$。即$r(t)$是初值问题(1.2.22)的最大解。同理可证初值问题(1.2.22)有最小解。□

如果初值问题(1.2.22)的一个饱和解在其最大存在区间上又是最大解，则称该解为初值问题(1.2.22)的最大饱和解。同样可以定义最小饱和解。利用引理1.2.2和常微分方程延拓定理，可知下列结论成立：

引理1.2.3 设G是R^2中的开集，$g\in C[G,R^1]$，$(t_0,u_0)\in G$。则初值问题(1.2.22)有最大饱和解和最小饱和解。

下面两个定理在本书中经常被使用：

定理1.2.5 设G是R^2中的开集，$g\in C[G,R^1]$，$(t_0,u_0)\in G$。设$r(t)$是初值问题(1.2.22)的最大解，其向右最大存在区间为$[t_0,t_0+a)$。设$[t_0,t_1]\subset[t_0,t_0+a)$，则必存在$\varepsilon_0>0$，使当$0<\varepsilon<\varepsilon_0$时，初值问题

$$u'=g(t,u)+\varepsilon,\ u(t_0)=u_0+\varepsilon \tag{1.2.25}$$

的最大解$r(t,\ \varepsilon)$在$[t_0,\ t_1]$上存在，并且当$\varepsilon\to 0^+$时$r(t,\ \varepsilon)$在$[t_0,t_1]$上一致收敛于$r(t)$。

证 设G_0是有界开集，$\overline{G}_0\subset G$，并且对$t\in[t_0,\ t_1]$，有$(t,r(t))\in G_0$。不难证明必存在$b>0$，使对任给$t\in[t_0,\ t_1]$，$0<\varepsilon\leqslant\frac{b}{2}$，集合

$$R_t^\varepsilon=\{(\overline{t},u)\in R^2\,|\,t\leqslant\overline{t}\leqslant t+b,|u-(r(t)+\varepsilon)|\leqslant b\}$$

满足$R_t^\varepsilon\subset G_0$。令$M>0$满足

$$|g(t,u)|\leqslant M,\ \forall(t,u)\in G_0.$$

因此，对任给$t\in[t_0,\ t_1]$，$0<\varepsilon\leqslant\frac{b}{2}$，当$(t,u)\in R_t^\varepsilon$时

$$|g(t,u)+\varepsilon|\leqslant M+\frac{b}{2}.$$

根据引理1.2.2，初值问题(1.2.25)的最大解$r(t,\ \varepsilon)$在$[t_0,$

$t_0+\eta]$上有定义，其中

$$\eta=\min\left\{b,\frac{2b}{2M+b},\right\}$$

是与 ε 无关的常数.利用引理1.2.2的证明方法，并注意到最大解的唯一性，可知对$t\in[t_0,t_0+\eta]$一致成立

$$\lim_{\varepsilon\to 0} r(t,\varepsilon)=r(t).$$

这表明

$$\lim_{\to 0} r(t_0+\eta,\varepsilon)=r(t_0+\eta).$$

取 $0<\varepsilon_1\leqslant\frac{b}{2}$，使当 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$时

$$r(t_0+\eta,\varepsilon)\leqslant r(t_0+\eta)+\varepsilon$$

用 $R^{\varepsilon}_{t_0+\eta}(\varepsilon<\varepsilon_1)$ 代替前面的$R^{\varepsilon}_{t_0}$，重复前面的证明可知 必 存在$\varepsilon_2<\varepsilon_1$，使对$\varepsilon<\varepsilon_2$，初值问题

$$u'=g(t,u)+\varepsilon,\ u(t_0+\eta)=r(t_0+\eta)+\varepsilon$$

的最大解 $\tilde{r}(t,\varepsilon)$在$[t_0+\eta,t_0+2\eta]$上存在,并且关于 $t\in[t_0+\eta,t_0+2\eta]$一致有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\tilde{r}(t,\varepsilon)=r(t)$$

对$\varepsilon<\varepsilon_2$，定义

$$r(t,\ \varepsilon)=\tilde{r}(t,\varepsilon),\quad \forall t\in[t_0+\eta,\ t_0+2\eta],$$

则显然$r(t,\varepsilon)$是初值问题(1.2.25)在$[t_0,t_0+2\eta]$上的最大解，并且在$[t_0,t_0+2\eta]$上一致有

$$\lim_{\varepsilon\to 0} r(t,\varepsilon)=r(t).$$

重复上面的证明有限次，即知存在某自然数n及$\varepsilon_0=\varepsilon_n$，使得$[t_0,t_1]\subset[t_0,t_0+n\eta]$，并且当 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ 时初值问题（1.2.25)的最大解$r(t,\varepsilon)$在$[t_0,t_1]$上存在，且关于 $t\in[t_0,\ t_1]$上一致有

$$\lim_{\varepsilon\to 0} r(t,\varepsilon)=r(t).$$

定理证完。□

定理1.2.6 设G是R^2中的开集，$g\in C[G,R^1]$，$(t_0, u_0)\in G$。设初值问题(1.2.22)的最大解为 $r(t)$，其向右最大 存在区间为$[t_0,t_0+a)$。设$m(t)\in C[[t_0,t_0+a),R^1]$满足：$(t,m(t))\in G(\forall t\in[t_0,t_0+a)$；$m(t_0)\leqslant u_0$，且对四个Dini导数中的某一个(记为$D$)有

$$Dm(t)\leqslant g(t,m(t)),\quad \forall t\in[t_0,t_0+a)\setminus\Gamma, \tag{1.2.26}$$

其中Γ是$[t_0,t_0+a)$中的一至多可数集。则必有

$$m(t)\leqslant r(t),\quad \forall t\in[t_0,t_0+a).$$

证 定义

$$h(t)=m(t)-\int_{t_0}^{t} g(s,m(s))ds.$$

由(1.2.26)式知

$$Dh(t)=Dm(t)-g(t,m(t))\leqslant 0,$$

$$\forall t\in[t_0,t_0+a)\setminus\Gamma.$$

根据定理1.2.3，系1.2.5，定理1.2.4和系1.2.6(令$E=R^1$，$P=\{x\in R^1\,|\,x\geqslant 0\}$，$x(t)=-h(t)$)，可知在$[t_0, t_0+a)$上，$h(t)$是减函数，从而

$$D_-h(t)=D_-m(t)-g(t,m(t))\leqslant 0$$

$$\forall t\in[t_0,t_0+a).$$

因此

$$D_-m(t)\leqslant g(t,m(t)),\quad \forall t\in[t_0,t_0+a). \tag{1.2.27}$$

任取τ，使$t_0<\tau<t_0+a$，根据定理1.2.5，初值问题(1.2.25)的最大解$r(t,\varepsilon)$当ε充分小时在$[t_0,\tau]$上存在，并且在$[t_0, \tau]$上一致有

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} r(t,\varepsilon)=r(t).$$

由(1.2.27)式及引理1.2.1知

$$m(t)<r(t,\varepsilon),\quad \forall t\in[t_0,\tau]$$

在该式中令 $\varepsilon\to 0^+$，即知 $m(t)\leqslant r(t)$ （$\forall t\in[t_0,\ \tau]$）。注意到 $\tau\in[t_0,t_0+a)$ 是任取的，故

$$m(t)\leqslant r(t),\quad \forall t\in[t_0,t_0+a).$$

证完。□

1.3 半内积

设 E 是实Banach空间，$x,y\in E$。考察范数 $\|\cdot\|$ 在点 x 沿 y 的方向导数，即

$$[x,y]_+=\lim_{h\to+0}[x,y]_h, \tag{1.3.1}$$

$$[x,y]_-=\lim_{h\to-0}[x,y]_h, \tag{1.3.2}$$

这里

$$[x,y]_h=\frac{1}{h}(\|x+hy\|-\|x\|). \tag{1.3.3}$$

引理1.3.1 对任何 $x,y\in E$，$[x,y]_+$ 与 $[x,y]_-$ 都存在（是有限的数），并且 $[x,y]_+$ 是上半连续的（关于 x,y），$[x,y]_-$ 是下半连续的。

证 先证 $[x,y]_h$ 是 h（$-\infty<h<+\infty$，$h\neq 0$）的增函数。设 $0<h_1<h_2$ 并令 $\beta=1-\dfrac{h_1}{h_2}$，则 $0<\beta<1$ 且

$$x+h_1y=x+(1-\beta)h_2y=\beta x+(1-\beta)[x+h_2y],$$

于是

$$[x,\ y]_{h_1}=\frac{1}{h_1}(\|x+h_1y\|-\|x\|)$$

$$=\frac{1}{h_1}(\|\beta x+(1-\beta)(x+h_2y)\|-\|x\|)$$

$$\leqslant\frac{1}{h_1}\{\beta\|x\|+(1-\beta)\|x+h_2y\|-\|x\|\}$$

$$=\frac{1}{h_2}(\|x+h_2y\|-\|x\|)=[x,y]_{h_2}.$$

类似地，可证：$h_1<h_2<0\Rightarrow[x,y]_{h_1}\leqslant[x,y]_{h_2}$.现设 $h_1<0<h_2$。令$h=\min\{-h_1,h_2\}$。由于

$$2\|x\|=\|x+hy+x-hy\|\leqslant\|x+hy\|+\|x-hy\|,$$

故得$[x,y]_{-h}\leqslant[x,y]_h$，从而由以上所证，知

$$[x,y]_{h_1}\leqslant[x,y]_{-h}\leqslant[x,y]_h\leqslant[x,y]_{h_2}.$$

$[x,y]_h$关于h是增函数的结论获证.由此可知，极限(1.3.1)和(1.3.2)均存在有限，并且$[x,y]_-\leqslant[x,y]_+$.

现设$\{x_n\}$，$\{y_n\}\subset E$，$x,y\in E$，$x_n\to x$，$y_n\to y$。对$h>0$，我们有

$$[x_n,y_n]_+\leqslant\frac{1}{h}(\|x_n+hy_n\|-\|x_n\|),(n=1,2,3\cdots).$$

两端取上极限，得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}[x_n,y_n]_+\leqslant\frac{1}{h}(\|x+hy\|-\|x\|),\forall h>0;$$

再令$h\to+0$取极限，得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}[x_n,y_n]_+\leqslant[x,y]_+. \tag{1.3.4}$$

此即表示$[x,y]_+$是上半连续的。由此，再注意到$[x,y]_-=-[x,-y]_+$，即知$[x,y]_-$是下半连续的。□

引理1.3.2 $[x,y]_\pm$具有下列性质：

(i) $[x,y]_-\leqslant[x,y]_+$； (ii) $|[x,y]_\pm|\leqslant\|y\|$；

(iii) $|[x,y]_\pm-[x,z]_\pm|\leqslant\|y-z\|$；

(iv) $[x,y]_+=-[x,y]_-=-[-x,y]_-$;

(v) $[sx,ry]_\pm=r[x,y]_\pm, \forall r\geqslant 0, s>0$;

(vi) $[x,\alpha x]_\pm=\alpha\|x\|, \forall \alpha\in R^1$;

(vii) $[x,y+z]_+\leqslant[x,y]_++[x,z]_+$,

$[x,y+z]_-\geqslant[x,y]_-+[x,z]_-$;

(viii) $[x,y+z]_+\geqslant[x,y]_++[x,z]_-$,

$[x,y+z]_-\leqslant[x,y]_-+[x,z]_+$;

(ix) $[x,y+\alpha x]_\pm=[x,y]_\pm+\alpha\|x\|, \forall\alpha\in R^1$;

(x) 设x: $[a,b]\to E$, $m(t)=\|x(t)\|$, 且对某$t\in(a,b)$, $x_\pm'(t)$存在($x_+'(t)$是右导数, $x_-'(t)$是左导数), 则 $m_\pm'(t)$ 必存在, 且$m_\pm'(t)=[x(t),x_\pm'(t)]_\pm$.

证 由$[x,y]_\pm$的定义, 显然(i)~(vi)成立. (vii) 由不等式

$$\|x+h(y+z)\|\leqslant\frac{1}{2}\|x+2hy\|+\frac{1}{2}\|x+2hz\|$$

直接推出. 注意到

$$\|x+hy\|\leqslant\frac{1}{2}\|x+2h(y+z)\|+\frac{1}{2}\|x-2hz\|,$$

得 $[x,y]_+\leqslant[x,y+z]_++[x,-z]_+=[x,y+z]_+-[x,z]_-$, 由此推出(viii)的第一个不等式. (viii)的第二个不等式可类似地证明. (ix)从(vi)~(viii)直接推出, 因为

$$[x,y+\alpha x]_+\leqslant[x,y]_++[x,\alpha x]_+=[x,y]_++\alpha\|x\|,$$

$$[x,y+\alpha x]_+\geqslant[x,y]_++[x,\alpha x]_-=[x,y]_++\alpha\|x\|.$$

同样可得 $[x,y+\alpha x]_-=[x,y]_-+\alpha\|x\|$. 最后证(x).

我们有

$$\left|\frac{1}{h}[m(t+h)-m(t)]-\frac{1}{h}[\|x(t)+hx_+'(t)\|-\|x(t)\|]\right|$$

$$=\left|\frac{1}{h}[\|x(t+h)\|-\|x(t)+hx'(t)\|]\right|$$

$$\leqslant\left\|\frac{1}{h}[x(t+h)-x(t)]-x_+'(t)\right\|\to 0\text{，当}h\to+0\text{时。}$$

由此可知 $m_+'(t)=[x(t),\ x_+'(t)]_+$。类似地可证 $m_-'(t)=[x(t),x_-'(t)]_-$。□

定义1.3.1 设E是实Banach空间，E^*表E的共轭空间。对$x\in E$，令

$$Jx=\{f\in E^*|f(x)=\|x\|^2=\|f\|^2\}. \tag{1.3.5}$$

多值映象$J:E\to 2^{E^*}$(2^{E^*}表E^*的全部子集所成的集）叫做E的**正规对偶映象**（参见郭大钧[1]）。易知对任何$x\in E,Jx\neq\phi$。事实上，显然$\theta\in J\theta$。若$x\neq\theta$。由Hahn-Banach 定理知，存在$f_0\in E^*$使$\|f_0\|=1$，$f_0(x)=\|x\|$。于是，$f=\|x\|f_0\in Jx$。

对$x,y\in E$，我们令

$$(x,y)_+=\sup\{f(y)|f\in Jx\}, \tag{1.3.6}$$

$$(x,y)_-=\inf\{f(y)|f\in Jx\}. \tag{1.3.7}$$

$(x,y)_+$和$(x,y)_-$叫做元素x,y的半内积。由

$$|f(y)|\leqslant\|f\|\cdot\|y\|=\|x\|\cdot\|y\|,\forall f\in Jx$$

即知$(x,y)_+$与$(x,y)_-$都是有限数，且

$$-\|x\|\cdot\|y\|\leqslant(x,y)_-\leqslant(x,y)_+\leqslant\|x\|\cdot\|y\|.$$

注意，当$E=H$是实Hilbert空间时，J是单值的，且$Jx=x$，$\forall x\in H$（参看郭大钧[1]）。于是，由（1.3.6）式与(1.3.7)式知，$(x,y)_+=(x,y)_-=(x,y)$。故Banach空间中的半内积$(x,y)_\pm$是Hilbert空间中内积(x,y)的推广。

引理1.3.3 对任何$x,y\in E$，$f\in Jx$，有

$$\|x\|\cdot[x,y]_-\leqslant f(y)\leqslant\|x\|\cdot[x,y]_+. \tag{1.3.8}$$

证 对$h\in R^1$，我们有

$$\begin{aligned}-hf(y)=f(x)-f(x+hy)&\geqslant\|x\|^2-\|f\|\cdot\|x+hy\|\\ &=\|x\|^2-\|x\|\cdot\|x+hy\|\\ &\geqslant\frac{1}{2}(\|x\|^2-\|x+hy\|^2).\end{aligned} \tag{1.3.9}$$

于是，当$h>0$时，得

$$f(y)\leqslant\frac{1}{2h}(\|x+hy\|-\|x\|)\cdot(\|x+hy\|+\|x\|),$$

令$h\to+0$取极限，即得

$$f(y)\leqslant[x,y]_+\cdot\|x\|. \tag{1.3.10}$$

当$h<0$时，由(1.3.9)式得

$$f(y)\geqslant\frac{1}{2h}(\|x+hy\|-\|x\|)\cdot(\|x+hy\|+\|x\|),$$

令$h\to-0$即得

$$f(y)\geqslant[x,y]_-\cdot\|x\|. \tag{1.3.11}$$

最后，由(1.3.10)式和(1.3.11)式即得(1.3.8)式. □

定理1.3.1 对任何$x,y\in E$，有

$$(x,y)_\pm=\|x\|\cdot[x,y]_\pm, \tag{1.3.12}$$

并且

$$(x,y)_+=\max\{f(y)\mid f\in Jx\}, \tag{1.3.13}$$

$$(x,y)_-=\min\{f(y)\mid f\in Jx\}. \tag{1.3.14}$$

证 由(1.3.8)式，我们只需证明：对满足$[x,y]_-\leqslant\lambda\leqslant[x,y]_+$的任何$\lambda\in R^1$，必有$f\in Jx$存在，使

$$f(y)=\lambda\|x\|. \tag{1.3.15}$$

下证此结论. 可设x与y线性无关. 事实上，假定存在不全为零的实数α与β使$\alpha x+\beta y=\theta$. 若$\beta\neq0$，则$y=\alpha_1x$，这时$\lambda=$

$\alpha_1\|x\|$，显然对任何 $f\in Jx$(1.3.15) 式都成立；若 $\beta=0$，则 $\alpha\neq 0$，从而 $x=\theta$，这时对任何 $f\in Jx$ 有$\|f\|=\|x\|=0$，故(1.3.15)式恒成立。

令$G=\{z=\alpha x+\beta y|\alpha\in R^1, \beta\in R^1\}$（注意，$x$，$y$ 是固定的），则G是E的二维子空间。现在G上定义线性泛函 f_0 如下：

$$f_0(z)=\alpha\|x\|+\beta\lambda, \ \forall z=\alpha x+\beta y\in G. \qquad (1.3.16)$$

若 $\beta\geqslant 0$，则 $\beta\lambda\leqslant\beta[x, y]_+=[x,\beta y]_+$；若 $\beta<0$，则 $\beta\lambda\leqslant\beta[x,y]_-=-\beta[x,-y]_+=[x,\beta y]_+$。于是，对任何$\beta\in R^1$，有

$$f_0(z)=\alpha\|x\|+\beta\lambda\leqslant\alpha\|x\|+[x,\beta y]_+$$
$$=[x,\alpha x+\beta y]_+\leqslant\|\alpha x+\beta y\|=\|z\|,$$

在上式中以$-z$ 代 z，又得$-f_0(z)\leqslant\|z\|$。故$|f_0(z)|\leqslant\|z\|$，$\forall z\in G$。从而f_0是有界线性泛函，且$\|f_0\|\leqslant 1$。另一方面，在(1.3.16)式中令$\alpha=1$，$\beta=0$，得 $\|f_0\|\cdot\|x\|\geqslant f_0(x)=\|x\|$，故$\|f_0\|\geqslant 1$。由此可知$\|f_0\|=1$。根据Hahn-Banach 定理，存在$f_1\in E^*$使$\|f_1\|=\|f_0\|=1$且对任何$z\in G$有$f_1(z)=f_0(z)$。现令 $f=\|x\|f_1\in E^*$，则 $\|f\|=\|x\|$ 且 $f(x)=\|x\|f_1(x)=\|x\| f_0(x)=\|x\|^2$。由此可知$f\in Jx$。在(1.3.16)中令 $\alpha=0$，$\beta=1$，得$f(y)=\|x\|f_1(y)=\|x\|f_0(y)=\lambda\|x\|$。故(1.3.15)式成立。□

由定理1.3.1以及引理1.3.1、引理1.3.2即得下面的

定理1.3.2 半内积$(x,y)_\pm$具有下列性质：

(i) $(x,y)_-\leqslant(x,y)_+$；　(ii) $|(x,y)_\pm|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|$；

(iii) $|(x,y)_\pm-(x,z)_\pm|\leqslant\|x\|\cdot\|y-z\|$；

(iv) $(x,y)_+=-(x,-y)_-=-(-x,y)_-$；

(v) $(sx,ry)_\pm=sr(x,y)_\pm$，$\forall s\geqslant 0, r\geqslant 0$；

(vi) $(x,\alpha x)_\pm=\alpha\|x\|^2, \forall\alpha\in R^1$;

(vii) $(x,y+z)_+\leqslant(x,y)_++(x,z)_+$;

$$(x,y+z)_-\geqslant(x,y)_-+(x,z)_-;$$

(viii) $(x,y+z)_+\geqslant(x,y)_++(x,z)_-$;

$$(x,y+z)_-\leqslant(x,y)_-+(x,z)_+;$$

(iv) $(x,y+\alpha x)_\pm=(x,y)_\pm+\alpha\|x\|^2, \forall\alpha\in R^1$;

(x) 设x：$[a, b]\to E$，$m(t)=\|x(t)\|$，$n(t)=\|x(t)\|^2$，且对某$t\in(a,b)$，$x_\pm'(t)$存在，则 $m_\pm'(t)$和$n_\pm'(t)$ 都存在，且

$$m(t)m_\pm'(t)=(x(t),x_\pm'(t))_\pm, n_\pm'(t)=2(x(t),x_\pm'(t))_\pm.$$

(xi) $(x,y)_+$是上半连续的，$(x,y)_-$是下半连续的.

1.4 附 注

1.1中关于非紧性测度的内容选自 Lakshmikantham 和 Leela[2]以及Deimling[1]. 与此有关，可参看郭大钧[1]. 1.1中介绍的是按Kuratowski意义的非紧性测度，此外还有按Hausdorff意义的非紧性测度，其定义为$r(S)=\inf\{\delta>0 \mid S$ 可被有限个半径$\leqslant\delta$的闭球所覆盖$\}$. 两种非紧性测度的关系是$r(S)\leqslant\alpha(S)\leqslant 2r(S)$. $r(S)$也是有和$\alpha(S)$类似的性质. 1.2中有关中值定理的内容选自Martin[1]，比较定理取自Lakshmikantham和Leela[1]. 应当指出，如果将Γ是可数集换成Γ是测度为零的集，则定理1.2.1不再成立. 这是因为我们可以作出这样的连续且严格增的函数x：$[0, 1]\to R^1$，它满足$x(0)=0$，$x(1)=1$，并且$x'(t)=0$ $p.$ $p.$ 于 $t\in[0, 1]$（参看陈建功[1]）. 另一方面，即使$x\in C^1[I, E]$，除去$E=R^1$外，我们不能断定存在 $a<\xi<b$ 使 $x(b)-x(a)=(b-a)$

$x'(\xi)$。例如，设$E=R^2$，$a=0$，$b=2\pi$，$x(t)=(\sin t,\cos t)$。则$x(2\pi)-x(0)=(0,0)$；但对任何$t\in[0,2\pi]$，$2\pi x'(t)=2\pi(\cos t,-\sin t)\neq(0,0)$。1.3半内积的内容选自 Lakshmikantham和Leela[2]以及Deimling[1].和本章有关的内容，还可参看Deimling[2]，Lloyd[1]。

第二章　Cauchy问题解的存在唯一性

设E是实Banach空间，考察Cauchy问题

$$x'=f(t,x),\quad x(t_0)=x_0, \tag{2.1}$$

其中$f\in C[I\times D,\ E]$，$D\subset E$，$t_0\in I$，$x_0\in D$，I是R^1中某区间．容易看出，初值问题(2.1)与下面的积分方程等价：

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds. \tag{2.2}$$

2.1　近似解与解的关系

以下，恒记$R_0=[t_0,\ t_0+a]\times B(x_0,\ b)$，这里$a>0$，$b>0$，$B(x_0,b)=\{x\in E\mid \|x-x_0\|\leqslant b\}$．

定理2.1.1　设$f\in C[R_0,E]$，又设$0<\alpha\leqslant a, x_n\in C^1[[t_0,\ t_0+\alpha],\ B(x_0,b)]$满足

$$x_n'(t)=f(t,x_n(t))+y_n(t), x_n(t_0)=x_0, \|y_n(t)\|\leqslant\varepsilon_n,$$

$$\forall t\in[t_0,t_0+\alpha],\ (n=1,2,3,\cdots), \tag{2.1.1}$$

其中$\varepsilon_n>0$，$\varepsilon_n\to 0$，$y_n\in C[[t_0,t_0+\alpha],E]$．如果

$$\|x_n(t)-x(t)\|\to 0\ u.c.\ \forall t\in[t_0,t+\alpha],(n\to\infty) \tag{2.1.2}$$

($u.c.$表一致收敛)，则$x\in C^1[[t_0,t_0+\alpha],\ B(x_0,b)]$，且

$$x'(t)=f(t,x(t)),\quad x(t_0)=x_0, \forall t\in[t_0,t_0+\alpha]. \tag{2.1.3}$$

证　由(2.1.2)式显然$x\in C[[t_0,t_0+\alpha],B(x_0,b)]$．对任何

固定的$t_1\in[t_0,t_0+a]$，我们令

$$F(t,\ n)=\frac{x_n(t)-x_n(t_1)}{t-t_1}-f(t_1,x_n(t_1))-y_n(t_1).$$

很明显

$$\lim_{t\to t_1}F(t,n)=x_n'(t_1)-f(t_1,x_n(t_1))-y_n(t_1)=\theta,$$

$$\lim_{n\to\infty}F(t,\ n)=\frac{x(t)-x(t_1)}{t-t_1}-f(t_1,x(t_1)). \qquad (2.1.4)$$

任给$\varepsilon>0$．存在$\delta_1>0$使

$$\|f(t,z)-f(t_1,x(t_1))\|<\frac{\varepsilon}{4},$$

$$\forall |t-t_1|<\delta_1,|z-x(t_1)|<\delta_1. \qquad (2.1.5)$$

取N，使

$$\varepsilon_n<\frac{\varepsilon}{4},\|x_n(t)-x(t)\|<\frac{\delta_1}{2},\forall n>N,t\in[t_0,t_0+a]. \qquad (2.1.6)$$

再取$\delta>0$使$\delta<\delta_1$且

$$\|x(t)-x(t_1)\|<\frac{\delta_1}{2},\quad \forall |t-t_1|<\delta. \qquad (2.1.7)$$

由$F(t,n)$的定义以及(2.1.1)式，有

$$x_n(t)-x_n(t_1)-(t-t_1)x_n'(t_1)=(t-t_1)F(t,n). \qquad (2.1.8)$$

取$\varphi\in E^*$使$\|\varphi\|=1$且

$$\varphi[x_n(t)-x_n(t_1)-(t-t_1)x_n'(t_1)]$$
$$=\|x_n(t)-x_n(t_1)-(t-t_1)x_n'(t_1)\|,$$

并令$\psi(t)=\varphi(x_n(t))-(t-t_1)\varphi(x_n'(t_1))$。于是，$\psi'(t)=\varphi(x_n'(t))-\varphi(x_n'(t_1))$，从而

$$\|x_n(t)-x_n(t_1)-(t-t_1)x_n'(t_1)\|=\psi(t)-\psi(t_1)$$
$$=\psi'(\overline{t})(t-t_1)=\varphi(x_n'(\overline{t})-x_n'(t_1))(t-t_1)$$
$$\leqslant\|\varphi\|\cdot\|x_n'(\overline{t})-x_n'(t_1)\|\cdot|t-t_1|$$

$$=\|x_n'(\overline{t})-x_n'(t_1)\|\cdot|t-t_1|,$$

其中$\overline{t}$在t与t_1之间．由此，注意到(2.1.8)式，得

$$\|F(t,n)\|\leqslant\|x_n'(\overline{t})-x_n'(t_1)\|,\ t_1\leqslant\overline{t}\leqslant t. \qquad (2.1.9)$$

当$n>N$，$0<|t-t_1|<\delta$时，由（2.1.7）式和（2.1.6）式知 $\|x(\overline{t})-x(t_1)\|<\frac{\delta_1}{2}$，$\|x_n(\overline{t})-x(t_1)\|\leqslant\|x_n(\overline{t})-x(\overline{t})\|+\|x(\overline{t})-x(t_1)\|<\frac{\delta_1}{2}+\frac{\delta_1}{2}=\delta_1$，从而根据(2.1.9)式和(2.1.5)式得

$$\begin{aligned}\|F(t,n)\|&\leqslant\|x_n'(\overline{t})-x_n'(t_1)\|\\&=\|f(\overline{t},x_n(\overline{t}))+y_n(\overline{t})-f(t_1,x_n(t_1))-y_n(t_1)\|\\&\leqslant\|f(\overline{t},\ x_n(\overline{t}))-f(t_1,x(t_1))\|+\|f(t_1,x(t_1))\\&\qquad-f(t_1,x_n(t_1))\|+2\varepsilon_n\\&<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+2\varepsilon_n<\varepsilon.\quad(n>N,\ 0<|t-t_1|<\delta).\end{aligned}$$

现让$n\to\infty$取极限，并注意到(2.1.4)式，得

$$\left\|\frac{x(t)-x(t_1)}{t-t_1}-f(t_1,x(t_1))\right\|\leqslant\varepsilon,\quad\forall\ 0<|t-t_1|<\delta.$$

由此可知$x'(t_1)$存在且

$$x'(t_1)=f(t_1,x(t_1)).$$

由$t_1\in[t_0,t_0+a]$的任意性，即知（2.1.3）式成立，由此又知 $x\in C^1[[t_0,t_0+a],B(x_0,b)]$．□

系2.1.1 若将条件(2.1.1)式换为

$$x_{n+1}'(t)=f(t,x_n(t))+y_n(t),\ x_n(t_0)=x_0,\ \|y_n(t)\|\leqslant\varepsilon_n,$$
$$\forall t\in[t_0,t_0+a],\ (n=1,2,3\cdots), \qquad (2.1.10)$$

而其他条件不变，则定理2.1.1的结论仍成立．

证 证明与定理2.1.1完全类似，只需改换$F(t,\ n)$的定义如下：

$$F(t,\ n)=\frac{x_{n+1}(t)-x_{n+1}(t_1)}{t-t_1}-f(t_1,x_n(t_1))-y_n(t_1). \quad \square$$

2.2 解的存在唯一性

定理2.2.1 设(a) $f\in C[R_0,E]$ 且 $\|f(t,x)\|\leqslant M$, $\forall (t,x)\in R_0$; (b) $g\in C[[t_0,t_0+a]\times[0,b],R^1]$ 且 $0\leqslant g(t,u)\leqslant M_1$, $\forall t\in[t_0,t_0+a]$, $0\leqslant u\leqslant b$; 又 $g(t,0)\equiv 0$, $g(t,u)$ 关于 u 是增函数（即 $t_0\leqslant t\leqslant t_0+a$, $0\leqslant u_1\leqslant u_2\leqslant b\Rightarrow g(t,u_1)\leqslant g(t,u_2)$），并且普通常微分方程初值问题

$$u'=g(t,u),\ u(t_0)=0 \tag{2.2.1}$$

在 $[t_0,t_0+a]$ 上只有零解 $u\equiv 0$; (c) $\|f(t,x)-f(t,y)\|\leqslant g(t,\|x-y\|)$, $\forall (t,x)$, $(t,y)\in R_0$ 且 $\|x-y\|\leqslant b$.

则Cauchy问题(2.1)在 $[t_0,\ t_0+\alpha]$ 上具有唯一解 $x\in C^1[[t_0,t_0+\alpha],\ B(x_0,b)]$, 这里 $\alpha=\min\left\{a,\frac{b}{M},\ \frac{b}{M_1}\right\}$; 并且，迭代序列

$$x_0(t)\equiv x_0,\ x_{n+1}(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,x_n(s))ds$$

$$(n=0,1,2,\cdots), \tag{2.2.2}$$

在 $[t_0,t_0+\alpha]$ 上一致收敛于 $x(t)$.

证 由(2.2.2)，用归纳法易知

$\|x_{n+1}(t)-x_0\|\leqslant b$, $\forall t\in[t_0,t_0+\alpha]$, $n=0,1,2,\cdots$

故 $x_{n+1}\in C^1[[t_0,t_0+\alpha],\ B(x_0,b)]$ 且

$$x_{n+1}'(t)=f(t,x_n(t)),\ x_n(t_0)=x_0\ (n=0,1,2,\cdots) \tag{2.2.3}$$

令$M_2=\max\{M,M_1\}$，则$\alpha=\min\left\{a,\frac{b}{M_2}\right\}$. 作迭代序列如下：

$$\begin{cases}u_0(t)=M_2(t-t_0),t_0\leqslant t\leqslant t_0+\alpha;\\ u_{n+1}(t)=\int_{t_0}^{t}g(s,u_n(s))ds,\ t_0\leqslant t\leqslant t_0+\alpha,\end{cases}$$

$$(n=0,1,2,\cdots). \qquad (2.2.4)$$

显然

$$u_1(t)=\int_{t_0}^{t}g(s,u_0(s))ds\leqslant M_1(t-t_0)\leqslant u_0(t)\leqslant b,$$

$$\forall t\in[t_0,t_0+\alpha].$$

于是，由归纳法并注意到$g(t,u)$是u的增函数，易知

$$0\leqslant u_{n+1}(t)\leqslant u_n(t)\leqslant b,\ \forall t\in[t_0,t_0+\alpha],$$

$$(n=0,1,2,\cdots). \qquad (2.2.5)$$

因为$|u_{n+1}'(t)|=|g(t,u_n(t))|\leqslant M_1$，故由Ascoli-Arzela 定理以及(2.2.5)式知$\{u_n(t)\}$在$[t_0,\ t_0+\alpha]$上一致收敛于某连续函数$u(t)$，且

$$u(t)=\int_{t_0}^{t}g(s,u(s))ds. \qquad (2.2.6)$$

由此可知$u\in C^1[[t_0,t_0+\alpha],\ [0,b]]$且$u$是初值问题(2.2.1)的解. 由假定$(b)$得$u(t)\equiv 0$. 我们有

$$\|x_1(t)-x_0(t)\|\leqslant\int_{t_0}^{t}\|f(s,x_0)\|ds\leqslant M(t-t_0)\leqslant u_0(t).$$

假定$\|x_k(t)-x_{k-1}(t)\|\leqslant u_{k-1}(t)$，则由条件$(c)$，

$$\|x_{k+1}(t)-x_k(t)\|\leqslant\int_{t_0}^{t}\|f(s,x_k(s))-f(s,x_{k-1}(s))\|ds$$

$$\leqslant\int_{t_0}^{t}g(s,\|x_k(s)-x_{k-1}(s)\|)ds$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{t} g(s, u_{k-1}(s))ds = u_k(t).$$

故由归纳法，知

$$\|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| \leqslant u_n(t), \quad t \in [t_0, t_0 + a],$$
$$(n = 0, 1, 2, \cdots). \qquad (2.2.7)$$

由此又知

$$\|x_{n+1}'(t) - x_n'(t)\| = \|f(t, x_n(t)) - f(t, x_{n-1}(t))\|$$
$$\leqslant g(t, \|x_n(t) - x_{n-1}(t)\|) \leqslant g(t, u_{n-1}(t)). \qquad (2.2.8)$$

设$m \geqslant n$. 注意到(2.2.8)式与(2.2.5)式，得

$$\|x_n'(t) - x_m'(t)\|$$
$$\leqslant f(t, x_{n-1}(t)) - f(t, x_n(t))\| + \|f(t, x_n(t))$$
$$- f(t, x_m(t))\| + \|f(t, x_m(t)) - f(t, x_{m-1}(t))\|$$
$$\leqslant g(t, u_{n-1}(t)) + g(t, \|x_n(t) - x_m(t)\|) + g(t, u_{m-1}(t))$$
$$\leqslant g(t, \|x_n(t) - x_m(t)\|) + 2g(t, u_{n-1}(t)).$$

对于任给的$\varepsilon > 0$，由于$g(t, u_{n-1}(t))$一致趋于零($n \to \infty$)，必存在N，使

$$D^+\|x_n(t) - x_m(t)\| \leqslant \|x_n'(t) - x_m'(t)\|$$
$$< g(t, \|x_n(t) - x_m(t)\|) + \varepsilon, \quad \forall m \geqslant n \geqslant N.$$

这里D^+是Dini导数. 由此,注意到$\|x_n(t_0) - x_m(t_0)\| = 0 < \varepsilon$，应用定理1.2.6，知

$$\|x_n(t) - x_m(t)\| \leqslant r(t, \varepsilon), \quad \forall t \in [t_0, t_0 + a],$$
$$m \geqslant n \geqslant N, \qquad (2.2.9)$$

其中$r(t, \varepsilon)$表初值问题

$$u' = g(t, u) + \varepsilon, \quad u(t_0) = \varepsilon \qquad (2.2.10)$$

的最大解. 再根据定理1.2.5,知:当$\varepsilon \to 0$时，$r(t, \varepsilon)$在$t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + a$上一致收敛于问题(2.2.1)的最大解$u(t) \equiv 0$.由此，再根

据(2.2.9)式即知$\{x_n(t)\}$在$[t_0,t_0+\alpha]$上一致收敛于某连续（抽象）函数$x(t)$。于是，注意到(2.2.3)式，应用系2.1.1，即知$x\in C^1[[t_0,t_0+\alpha], B(x_0,b)]$且$x(t)$是问题(2.1)的解。

最后证明解的唯一性，设$y(t)$是(2.1)在$[t_0, t_0+\alpha]$上的另一解。令$m(t)=\|x(t)-y(t)\|$。则$m(t_0)=0$且

$$D^+m(t)\leqslant\|x'(t)-y'(t)\|=\|f(t,x(t))-f(t,y(t))\|$$
$$\leqslant g(t,\|x(t)-y(t)\|)\leqslant g(t,m(t)).$$

于是，根据定理1.2.6知$\|x(t)-y(t)\|\leqslant u(t)\equiv 0$，$\forall t\in[t_0, t_0+\alpha]$，其中$u(t)\equiv 0$是问题(2.2.1)在$[t_0, t_0+\alpha]$上的最大解。由此知$x(t)\equiv y(t)$。□

系2.2.1 设$f\in C[R_0,E]$，$\|f(t,x)\|\leqslant M, \forall(t, x)\in R_0$；并且$f$满足Lipschitz条件：

$$\|f(t,x)-f(t,y)\|\leqslant L\|x-y\|, \forall(t,x),(t,y)\in R_0, \quad (2.2.11)$$

其中$L=\text{const.}>0$。则Cauchy问题(2.1)在$[t_0,t_0+\alpha]$上具有唯一解$x\in C^1[[t_0, t_0+\alpha], B(x_0, b)]$，这里$\alpha=\min\left\{a,\frac{b}{M}, \frac{1}{L}\right\}$；并且迭代序列(2.2.2)在$[t_0, t_0+\alpha]$上一致收敛于$x(t)$。

证 在定理2.2.1中取$g(t,u)=Lu$即获证。这时$M_1=Lb$，从而$\alpha=\min\left\{a,\frac{b}{M}, \frac{1}{L}\right\}$。□

注意，由系2.2.1我们看出，定理2.2.1中的条件(b)与(c)是比Lipschitz条件更为广泛的条件。

在f满足局部Lipschitz条件下，我们还可获得下面的解的延拓定理和解对初值的连续依赖性定理（证明参见郭大钧[1]）。

定理2.2.2 设U是E中开集，$f\in C[R^1\times U, E]$且关于x满足局部Lipschitz条件（即对任何点$(t, x)\in R^1\times U$，都存在t的邻域J_t和x的邻域S_x，使$f(t, x)$在$J_t\times S_x$上关于x满足Lipschitz条件），$x_0\in U$。则Cauchy问题(2.1)的解必可唯一地延拓到某最大区间$[t_0,\eta)$上($\eta\leqslant+\infty$)，且若$\eta<+\infty$而且$\lim\limits_{t\to\eta-0}x(t)=x^*$存在，则必有$x^*\in\partial U$（$\partial U$表$U$的边界）。此解$x(t)$称为(2.1)的饱和解。

定理2.2.3 设U是E中开集，$f\in C[R^1\times U, E]$且关于x满足局部Lipschitz条件，$x_0\in U$。设Cauchy问题(2.1)的饱和解为$x(t;t_0,x_0)$，其最大存在区间是$[t_0, \eta(t_0, x_0))$。任给$t_0<\beta<\eta(t_0,x_0)$。则对于任给的$\varepsilon>0$，必存在$r>0$，使当$x_1\in S(x_0,r)=\{x\in E\mid \|x-x_0\|<r\}$时，必有$\eta(t_0,x_1)>\beta$且

$$\|x(t;t_0,x_1)-x(t;t_0,x_0)\|<\varepsilon, \forall t\in[t_0,\beta];$$

由此可知，当$x_1\to x_0$时，$x(t;t_0,x_1)$在$[t_0, \beta]$上一致趋于$x(t;t_0,x_0)$。

例2.2.1 考察一阶偏微分方程的初值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u(x, t)}{\partial t}=f(t,u(x,t)), \\ u(x,t_0)=u_0(x),\end{cases} \tag{2.2.11}$$

其中$u_0(x)\in C[[c,d], R^1]$，$f\in C[[t_0, t_0+a]\times D,R^1]$，$D=\{v\in R^1\mid \exists x\in[c,d]使u_0(x)-b\leqslant v\leqslant u_0(x)+b\}$，$b>0$。如果$f(t,u)$关于$u$满足Lipschitz条件：

$$|f(t,u)-f(t,v)|\leqslant L|u-v|, \ \forall t\in[t_0,t_0+a], \quad u, v\in D,$$

则存在$0<\alpha\leqslant a$，使初值问题(2.2.11)在$[c,d]\times[t_0, t_0+\alpha]$上具有唯一解$u(x,t)$$\left(u(x, t), \dfrac{\partial u(x, t)}{\partial t}均连续\right)$；并且，迭

代序列

$$\begin{cases} u_0(x,t)\equiv u_0(x), \\ u_{n+1}(x,t)=u_0(x)+\int_{t_0}^{t} f(s,\ u_n(x,\ s))ds \end{cases}$$

$$n(=0,1,2,\cdots)$$

在$[c,d]\times[t_0,t_0+\alpha]$上一致收敛于$u(x,t)$。

证 很明显，(2.2.11)可视为Banach空间$E=C[[c,d],R^1]$中的微分方程：

$$\frac{du}{dt}=f(t,u),\ u(t_0)=u_0, \qquad (2.2.12)$$

其中$u(t)=u(t,\ x)\in C[[c,\ d],\ R^1]$ (t固定)，$u_0=u_0(x)$。当$(t,w)\in[t_0,t_0+a]\times B(u_0,b)$时，我们有

$$\begin{aligned}\|f(t,w)\|&=\max_{x\in[c,d]}|f(t,w(x))| \\ &\leqslant\max\{|f(t,v)|\,|(t,v)\in[t_0,t_0+a]\times D\}=M.\end{aligned}$$

故系2.2.1的条件满足，从而根据系2.2.1知所述结论成立，其中$\alpha=\min\left\{a,\frac{b}{M},\ \frac{1}{L}\right\}$。□

例2.2.2 考察无穷常微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx_n}{dt}=f_n(t,x_1,x_2,\cdots), \\ x_n(t_0)=x_n^{(0)},\quad (n=1,2,3,\cdots), \end{cases} \qquad (2.2.13)$$

其中$f_n(t,x_1,x_2,\cdots)=\frac{t^2}{n}(1+x_n+x_{2n})^3-\frac{2}{n^2}\sin(t-x_{n+1})$,

$$(2.2.14)$$

$(n=1,2,3\cdots)$；$x_n^{(0)}\to 0\quad(n\to\infty)$。

试证：存在$\alpha>0$使无穷方程组(2.2.13)在$[t_0,t_0+\alpha]$上具有唯一解$x_n=x_n(t)\in C^1[[t_0,t_0+\alpha],R^1]$ $(n=1,2,3,\cdots)$满足$x_n(t)\to 0\ (n\to\infty)$，$\forall t\in[t_0,t_0+\alpha]$。

证 将方程组(2.2.13)写成 Banach 空间 $c_0=\{x=(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)|x_n\to 0\}$（范数$\|x\|=\sup\limits_n|x_n|$）上的常微分方程

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x),\quad x(t_0)=x_0, \tag{2.2.15}$$

其中$x=(x_1,x_2,\cdots)\in c_0$，$x_0=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots)\in c_0$，$f=(f_1, f_2,\cdots)$。由(2.2.14)式易知$f\in C[R^1\times c_0,c_0]$，并且$f$关于$x$满足局部Lipschitz条件。于是，根据系2.2.1知，存在 $\alpha>0$ 使问题(2.2.15)在$[t_0,t_0+\alpha]$上具有唯一解$x=x(t)\in C^1[[t_0,t_0+\alpha],c_0]$。□

2.3 闭集上解的存在唯一性

设F是E中某闭集。本节考察问题(2.1)是否在F中具唯一解的问题。即设$f\in C[I\times F,E]$，$x_0\in F$。问：是否存在$\alpha>0$，使问题(2.1)在$[t_0,t_0+\alpha]$上具有唯一解$x(t)\in F$？

引理2.3.1 设$f\in C[[t_0,t_0+a]\times F, E]$，$x_0\in F$。若存在$\alpha>0$及$x\in C^1[[t_0,t_0+\alpha], F]$，使$x(t)$在$[t_0, t_0+\alpha]$上满足(2.1)，则必

$$\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}d(x_0+hf(t_0,x_0),F)=0. \tag{2.3.1}$$

其中$d(z,F)$表点z到F的距离。

证 我们有

$$\begin{aligned}x(t_0+h)&=x(t_0)+hx'(t_0)+\omega(h)\\&=x_0+hf(t_0,x_0)+\omega(h),\end{aligned}$$

其中$\|\omega(h)\|=o(h)$，当$h\to+0$时。由于$x(x_0+h)\in F$，故

$$\frac{1}{h}d(x_0+hf(t_0,x_0),F)\leqslant\frac{1}{h}\|x_0+hf(t_0,x_0)-x(t_0+h)\|$$

$$=\frac{\|\omega(h)\|}{h}\to 0\text{，当}h\to+0\text{时。}$$

故(2.3.1)式成立。□

由引理2.3.1知：问题(2.1)对任何$t_0\in I$，$x_0\in F$都在F中有解的必要条件是：

$$\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}d(x+hf(t,x),F)=0\text{，}\forall t\in I,x\in F. \qquad (2.3.2)$$

当x是F的内点时，(2.3.2)式显然满足；故(2.3.2)式实际上是一个边界条件，即$x\in\partial F$时是否满足。

引理2.3.2 设 $f\in C[[t_0, t_0+a]\times F, E]$，$x_0\in F$，且$\|f(t, x)\|\leqslant M$，$\forall(t, x)\in[t_0, t_0+a]\times F_0$，这里 $F_0=F\cap B(x_0, b)$。又设

$$\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}d(x+hf(t,x),F)=0\text{，}\forall t\in[t_0,t_0+a],x\in F. \qquad (2.3.3)$$

假定$0<\varepsilon_n<1$，$\varepsilon_n\to 0$。于是，对任何n，Cauchy问题(2.1)具有多边形形式的近似解 $x_n\in C[[t_0, t_0+\alpha], B(x_0 b)]$ $\left(\alpha=\min\left\{a,\frac{b}{M+1}\right\}\right)$，满足下述条件：存在序列$\{t_i^n\}$，$t_0^n<t_1^n<\cdots<t_i^n<\cdots$，使得

(i) $t_0^n=t_0$，$t_i^n\to t_0+\alpha(i\to\infty)$，$t_i^n-t_{i-1}^n\leqslant\varepsilon_n$ $(i=1,2,3,\cdots)$；

(ii) $x_n(t_0^n)=x_0$，$\|x_n(t)-x_n(s)\|\leqslant(M+1)|t-s|$，$\forall t,s\in[t_0,t_0+\alpha]$；

(iii) $x_n(t_{i-1}^n)\in F_0$且$x_n(t)$在$[t_{i-1}^n,t_i^n]$上是线性的 $(i=1,2,3,\cdots)$；

(iv) $\left\| \dfrac{x_n(t_i^n)-x_n(t_{i-1}^n)}{t_i^n-t_{i-1}^n} - f(t_{i-1}^n,\ x_n(t_{i-1}^n)) \right\| \leqslant \varepsilon_n$;

(v) $(t,\ y)\in[t_{i-1}^n,\ t_i^n]\times F_0$，$\|y-x_n(t_{i-1}^n)\|\leqslant (M+1)(t_i^n-t_{i-1}^n)\Rightarrow\|f(t,y)-f(t_{i-1}^n,x_n(t_{i-1}^n))\|\leqslant\varepsilon_n$.

证 对于固定的n，我们对i用归纳法构造$x_n(t)$，为符号简单计，我们分别用$x(t)$，t_i，ε代表$x_n(t)$，t_i^n，ε_n。假定$x(t)$已在$[t_0,\ t_{i-1}]$上定义好了($t_{i-1}<t_0+a$)，并且在$[t_0,\ t_{i-1}]$上满足性质(i)～(v)。今按下法在$[t_{i-1},t_i]$上定义$x(t)$。令$\delta_i\in[0,\varepsilon]$表满足下列三个条件的最大数：

(a) $t_{i-1}+\delta_i\leqslant t_0+a$;

(b) $t\in[t_{i-1},t_{i-1}+\delta_i]$, $x\in F_0$, $\|x-x(t_{i-1})\|\leqslant(M+1)\delta_i\Rightarrow\|f(t,x)-f(t_{i-1},x(t_{i-1}))\|\leqslant\varepsilon$;

(c) $d(x(t_{i-1})+\delta_i f(t_{i-1},x(t_{i-1})),F)\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}\delta_i$.

此最大的δ_i显然存在(注意，由(2.3.3)式知满足(c)的δ_i存在)。令$t_i=t_{i-1}+\delta_i$。由(c)，可取$z\in F$使

$$\|x(t_{i-1})+(t_i-t_{i-1})f(t_{i-1},x(t_{i-1}))-z\|\leqslant\varepsilon(t_i-t_{i-1}). \tag{2.3.4}$$

我们定义

$$x(t)=\frac{z-x(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}}(t-t_{i-1})+x(t_{i-1}),\ \forall t\in[t_{i-1},\ t_i]. \tag{2.3.5}$$

于是$x(t_i)=z$，从而(2.3.4)式成为

$$\left\|\frac{x(t_i)-x(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}}-f(t_{i-1},\ x(t_{i-1}))\right\|\leqslant\varepsilon. \tag{2.3.6}$$

即(iv)成立。由此又知，当$t,s\in[t_{i-1},t_i]$时，

$$\|x(t)-x(s)\|=\left\|\frac{x(t_i)-x(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}}\right\|\cdot|t-s|$$

$$\leqslant |t-s|\cdot[\|f(t_{i-1},x(t_{i-1}))\|+\varepsilon]\leqslant(M+1)|t-s|,$$

故$x(t)$在$[t_0,t_i]$上满足(ii)。又，由于

$$\|x(t_i)-x_0\|\leqslant\sum_{k=1}^{i}\|x(t_k)-x(t_{k-1})\|$$

$$\leqslant (M+1)\sum_{k=1}^{i}(t_k-t_{k-1})$$

$$=(M+1)(t_i-t_0)\leqslant b,$$

故知$x(t_i)\in F_0$，从而(iii)满足。(v)成立由(b)直接推出。于是，最后我们只需证明$t_i\to t_0+\alpha$ $(i\to\infty)$，因为这时由(ii)知 $\lim\limits_{t\to(t_0+\alpha)} x(t)=\bar{x}=\in B(x_0,b)$存在，令$x(t_0+\alpha)=\bar{x}$即知$x(t)$在$[t_0,t_0+\alpha]$上有定义且全部条件(i)～(v)满足。

假若不然，即$\lim\limits_{i\to\infty}t_i=\tau<t_0+\alpha$。由(ii)知$\lim\limits_{i\to\infty}x(t_i)=z\in F_0$存在。由$f$的连续性知，存在$\eta>0$使

$$\|f(t,y)-f(\tau,z)\|\leqslant\frac{\varepsilon}{3},\ \forall|t-\tau|\leqslant\eta,$$

$$\|y-z\|\leqslant 2(M+1)\eta. \tag{2.3.7}$$

由条件(2.3.3)式，存在$\gamma>0$使$\gamma<\min\{\varepsilon,\eta,t_0+\alpha-\tau\}$且

$$d(z+\gamma f(\tau,z),F)\leqslant\frac{\gamma\varepsilon}{3}. \tag{2.3.8}$$

取正整数N，使

$$\tau-t_i<\gamma,\|z-x(t_i)\|\leqslant\gamma(M+1),\forall i\geqslant N. \tag{2.3.9}$$

于是，当$t\in[t_i,t_i+\gamma]$ $(i\geqslant N)$，$y\in F_0$，$\|y-x(t_i)\|\leqslant(M+1)\gamma$时，有$|t-\tau|\leqslant\gamma$，$\|y-z\|\leqslant\|y-x(t_i)\|+\|x(t_i)-z\|\leqslant2\gamma(M+1)<2\eta(M+1)$，从而，由(2.3.7)式得

$$\|f(t,y)-f(t_i,x(t_i))\|\leqslant\|f(t,y)-f(\tau,z)\|$$

$$+\|f(\tau,z)-f(t_i,x(t_i))\|\leqslant\frac{2}{3}\varepsilon.$$

故当把 δ_{i+1} 换成 γ 时，条件(a)与(b)成立。由（2.3.9）式知 $\gamma>\delta_{i+1}$ $(i\geqslant \bar{N})$，而δ_{i+1}是满足(a)，(b)，(c)中最大者，故 γ必不满足(c)，即

$$d(x(t_i)+\gamma f(t_i,x(t_i)),F)>\frac{\varepsilon}{2}\gamma,\ \forall i\geqslant N.$$

令$i\to\infty$取极限，得

$$d(z+\gamma f(\tau,z),\ F)\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\gamma,$$

此与(2.3.8)式矛盾。□

定理2.3.1 设$f\in C[[t_0,t_0+a]\times F,E]$，$x_0\in F$，且$\|f(t,x)\|\leqslant M$，$\forall(t,\ x)\in[t_0,\ t_0+a]\times F_0$，$F_0=F\cap B(x_0,\ b)$。又设（2.3.3）式满足。再设 $g\in C[[t_0,\ t_0+\alpha]\times R_+,\ R^1]$ $\left(\alpha=\min\left\{a,\dfrac{b}{M+1}\right\},\ R_+=\{u\in R^1\,|\,u\geqslant 0\}\right)$，$g(t,\ u)$关于 u 是增函数，$g(t,0)\equiv 0$且初值问题(2.2.1)在$[t_0,\ t_0+\alpha]$上只有零解$u\equiv 0$，并且

$$\|f(t,\ x)-f(t,\ y)\|\leqslant g(t,\ \|x-y\|),\ \forall t\in[t_0,t_0+\alpha],\quad x,y\in F_0. \tag{2.3.10}$$

则Cauchy问题(2.1)在$[t_0,\ t_0+\alpha]$上具有唯一属于F的解$x\in C^1[[t_0,t_0+\alpha],F_0]$。

证 根据引理2.3.2，问题(2.1)具有满足条件(i)～(v)的多边形近似解 $x_n(t)\in C[[t_0,\ t_0+\alpha],\ B(x_0,\ b)]$。下证序列$\{x_n(t)\}$在$[t_0,t_0+\alpha]$上一致收敛。令

$$m(t)=\|x_n(t)-x_m(t)\|,\ t\in[t_0,t_0+\alpha].$$

若$t\in(t_i^n,t_{i+1}^n)\cap(t_j^m,t_{j+1}^m)$，则由引理2.3.2的(iv)与(v)，知

$$D^+m(t)\leqslant\|x_n'(t)-x_m'(t)\|$$

$$=\left\|\frac{x_n(t_{i+1}^n)-x_n(t_i^n)}{t_{i+1}^n-t_i^n}-\frac{x_m(t_{j+1}^m)-x_m(t_j^m)}{t_{j+1}^m-t_j^m}\right\|$$

$$\leqslant\left\|\frac{x_n(t_{i+1}^n)-x_n(t_i^n)}{t_{i+1}^n-t_i^n}-f(t_i^n,x_n(t_i^n))\right\|$$

$$+\|f(_i^n,x_n(t_i^n))-f(t,x_n(t_i^n))\|+\|f(t,x_n(t_i^n))$$

$$-f(t,x_m(t_j^m))\|+\|f(t,x_m(t_j^m))-f(t_j^m,x_m(t_j^m))\|$$

$$+\left\|f(t_j^m,\ x_m(t_j^m))-\frac{x_m(t_{j+1}^m)-x_m(t_j^m)}{t_{j+1}^m-t_j^m}\right\|$$

$$\leqslant g(t,\|x_n(t_i^n)-x_m(t_j^m)\|)+2(\varepsilon_n+\varepsilon_n). \qquad (2.3.11)$$

由于

$$\|x_n(t_i^n)-x_m(t_j^m)\|\leqslant\|x_n(t_i^n)-x_n(t)\|$$

$$+\|x_n(t)-x_m(t)\|+\|x_m(t)-x_m(t_j^m)\|$$

$$\leqslant(M+1)(\varepsilon_n+\varepsilon_m)+m(t)\leqslant m(t)+\tau_{nm}\ ,$$

其中$\tau_{nm}=\max\{(M+1)(\varepsilon_n+\varepsilon_n),\ 2(\varepsilon_n+\varepsilon_m)\}$。令$v(t)=m(t)+\tau_{nm}$，则$v(t_0)=\tau_{nm}$，且由(2.3.11)式得知

$$D^+v(t)\leqslant g(t,v(t))+\tau_{nm}.$$

于是，根据定理1.2.6知

$$m(t)\leqslant v(t)\leqslant r_{nm}(t),t\in[t_0,t_0+a], \qquad (2.3.12)$$

其中$r_{nm}(t)$表初值问题

$$u'=g(t,u)+\tau_{nm},u(t_0)=\tau_{nm} \qquad (2.3.13)$$

的最大解．由于 $\tau_{nm}\to 0$ (n, $m\to\infty$时)，故由定理1.2.5知$r_{nm}(t)$在$[t_0,t_0+a]$上一致趋于问题(2.2.1)的最大解 $r(t)$。但由假定 $r(t)\equiv 0$，$\forall t\in[t_0,t_0+a]$。由此可知$r_{nm}(t)$在$[t_0,\ t_0+a]$上一致趋于零，由(2.3.12)式即知 $\|x_n(t)-x_m(t)\|$ 在 $[t_0,\ t_0+a]$上一致趋于零 ($n,m\to\infty$时)，故$\{x_n(t)\}$在$[t_0,t_0+a]$上一致趋于某$x(t)\in C[[t_0,t_0+a],B(x_0,b)]$.对于固定的$t\in[t_0,$

$t_0+a]$，设 $t\in[t^n_{i_n}, t^n_{i_n+1}]$ $(n=1,2,3,\cdots)$。于是

$$\|x(t)-x_n(t^n_{i_n})\|\leqslant\|x(t)-x_n(t)\|+(M+1)\cdot|t-t^n_{i_n}|$$
$$\leqslant\|x(t)-x_n(t)\|+(M+1)\varepsilon_n\to 0$$
$$(n\to\infty),$$

故由 $x_n(t^n_{i_n})\in F$ 知 $x(t)\in F$。下证

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,x(s))ds, t\in[t_0,t_0+a]. \qquad (2.3.14)$$

对 $t\in[t_0,t_0+a]$，设 $t\in[t^n_i,t^n_{i+1}]$，则我们有

$$\|x_n(t)-x_0-\int_{t_0}^{t}f(s,x_n(s))ds\|$$
$$\leqslant\|x_n(t)-x_n(t^n_i)-\int_{t^n_i}^{t}f(s,x_n(s))ds\|$$
$$+\sum_{k=1}^{i}\|x_n(t^n_k)-x_n(t^n_{k-1})-\int_{t^n_{k-1}}^{t^n_k}f(s,x_n(s))ds\|.$$

由引理2.3.2(iv)与(v)，知

$$\|x_n(t^n_k)-x_n(t^n_{k-1})-\int_{t^n_{k-1}}^{t^n_k}f(s,x_n(s))ds\|$$
$$\leqslant\|x_n(t^n_k)-x_n(t^n_{k-1})-(t^n_k-t^n_{k-1})f(t^n_{k-1},x_n(t^n_{k-1}))\|$$
$$+\int_{t^n_{k-1}}^{t^n_k}\|f(t^n_{k-1},x_n(t^n_{k-1}))-f(s,x_n(s))\|ds$$
$$\leqslant\varepsilon_n(t^n_k-t^n_{k-1})+\varepsilon_n(t^n_k-t^n_{k-1})=2\varepsilon_n(t^n_k-t^n_{k-1}),$$

类似地，可得

$$\|x_n(t)-x_n(t^n_i)-\int_{t^n_i}^{t}f(s,x_n(s))ds\|\leqslant2\varepsilon_n(t-t^n_i).$$

由此可知

$$\|x_n(t)-x_0-\int_{t_0}^{t}f(s,x_n(s))ds\|\leqslant 2\varepsilon_n(t-t_0). \quad (2.3.15)$$

另一方面，我们有

$$\left\|\int_{t_0}^{t}f(s,x_n(s))ds-\int_{t_0}^{t}f(s,\ x(s))ds\right\|$$

$$\leqslant\int_{t_0}^{t}\|f(s,x_n(s))-f(s,x(s))\|ds$$

$$\leqslant\int_{t_0}^{t}g(s,\ \|x_n(s)-x(s)\|)ds,$$

由此，注意到 $x_n(t)\to x(t)$ u. c. 于 $t\in[t_0,\ t_0+a]$ $(n\to\infty)$ (u.c.表一致收敛）以及$g(t,u)$的连续性和 $g(t,\ 0)\equiv 0$，即得

$$\int_{t_0}^{t}f(s,\ x_n(s))ds\to\int_{t_0}^{t}f(s,x(s))ds\ \ u.c.\text{于}t\in[t_0,t_0+a]$$

$$(n\to\infty). \quad (2.3.16)$$

由 (2.3.15) 式和 (2.3.16) 式即知 (2.3.14) 式成立。从而，$x\in C^1[[t_0,t_0+a],F_0]$且是问题(2.1)在$[t_0,t_0+a]$的解。至于解的唯一性，可仿定理2.2.1唯一性的证明，从略。□

系2.3.1 设$f\in C[[t_0,t_0+a]\times F,E]$，$x_0\in F$且$\|f(t,\ x)\|\leqslant M,\forall(t,x)\in[t_0,t_0+a]\times F_0,F_0=F\cap B(x_0,b)$。又设(2.3.3)式满足。再设

$$\|f(t,x)-f(t,y)\|\leqslant L\|x-y\|,\forall t\in[t_0,t_0+a],x,y\in F_0$$

$$(2.3.17)$$

其中$\alpha=\min\left\{a,\dfrac{b}{M+1}\right\}$。则Cauchy问题(2.1)在$[t_0,\ t_0+\alpha]$上具有唯一属于$F$的解$x\in C^1[[t_0,t_0+\alpha],F_0]$。

2.4 附　　注

定理2.1.1的证明方法是常规的，由郭大钧作出．定理2.2.1选自Lakshmikantham和Leela〔2〕，而定理2.2.2和定理2.2.3取自郭大钧〔1〕．引理2.3.2和定理2.3.1都取材于Lakshmikantham和Leela〔2〕．应当指出，引理2.3.2中，$0<\varepsilon_n<1$ 可换为 $0<\varepsilon_n<\varepsilon$，$\varepsilon>0$ 是任意给定的正数，从而 $\alpha=\min\left\{a, \frac{b}{M+\varepsilon}\right\}$．由此知：在定理2.3.1和系2.3.1中，都可把 $\alpha=\min\left\{a, \frac{b}{M+1}\right\}$ 换为 $\alpha=\min\left\{a, \frac{b}{M+\varepsilon}\right\}$，即 $\alpha\leqslant a$，$\alpha<\frac{b}{M}$．故在 $F=E$ 的情形，它们可视为定理2.2.1和系2.2.1在某种意义下的改进．但在定理2.3.1和系2.3.1的情形，不能推出迭代序列(2.2.2)一致收敛于解．和本章有关的内容，还可参看Deimling〔1〕，Martin〔1〕．

第三章　紧型条件

由第二章系2.2.1知，古典常微分方程论中的 Picard 定理（存在唯一性定理），对于抽象的Banach空间常微分方程仍然成立，但Peano定理（存在性定理）就不再成立了。即在无穷维Banach空间的情形，$f(t,x)$的连续性保证不了问题(2.1)解的存在性。下面的例子即说明这一事实。

例3.1　考察Banach空间$c_0=\{x=(x_1,x_2,x_3,\cdots)|x_n\to 0\}$（范数$\|x\|=\sup\limits_n|x_n|$）上的常微分方程初值问题：

$$x'=f(x),x(0)=x_0, \tag{3.1}$$

其中$x=(x_1,x_2,x_3,\cdots)\in c_0$,$x_0=\left(1,\frac{1}{2^2},\frac{1}{3^2},\cdots\right)\in c_0$,
$f(x)=2(\sqrt{|x_1|},\sqrt{|x_2|},\sqrt{|x_3|},\cdots)$。显然$f$：$c_0\to c_0$是连续的。假定问题（3.1）在某区间〔0，$\alpha$〕（$\alpha>0$）上有解$x=x(t)=(x_1(t),x_2(t),x_3(t),\cdots)\in c_0$，则

$$x_n'=2\sqrt{|x_n|},\ x_n(0)=\frac{1}{n^2}\ t\in[0,\alpha],(n=1,2,3,\cdots),$$

解之，得

$$x_n(t)=\left(t+\frac{1}{n}\right)^2,\ t\in[0,\alpha],\ (n=1,2,3,\cdots).$$

故当$0<t\leqslant\alpha$时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n(t)=t^2\neq 0$，此与$x(t)\in c_0$矛盾。由此可知，问题（3.1）在$c_0$中无解。

为了保证问题（2.1）解的存在性，除f的连续性外，还要对f加上一定的条件.本章所加的条件都和非紧性测度有关，它们属于所谓的紧型条件。

3.1 解的存在性

引理3.1.1 设E，E_1是实Banach空间，G是E中开集，$g: G\to E_1$连续.则对于任给的$\varepsilon>0$，必存在g_ε：$G\to E_1$，g_ε满足局部Lipschitz条件，并且$\|g_\varepsilon(x)-g(x)\|<\varepsilon$，$\forall x\in G$.

证 令$U_\varepsilon(x)=\{y\in G \bigm| \|g(y)-g(x)\|<\frac{\varepsilon}{2}\}$. 显然$U_\varepsilon(x)$是开集，且

$$G=\bigcup_{x\in G}U_\varepsilon(x).$$

由距离空间的仿紧性（例如，参见郭大钧〔1〕）知，G具有开覆盖$\{V_\tau | \tau\in T\}$，它精于$\{U_\varepsilon(x) | x\in G\}$且是局部有限的，即对任何$V_\tau$，都有$U_\varepsilon(x)$使$V_\tau\subset U_\varepsilon(x)$；同时，对任何$x\in G$，必有$x$的邻域$V(x)$存在，使$V(x)$只与有限个$V_\tau$相交.令

$$\alpha_\tau(x)=d(x,E\setminus V_\tau),\quad \forall x\in E.$$

显然，$\alpha_\tau(x)=0$，$\forall x\bar{\in}V_\tau$，并且

$$\|\alpha_\tau(x)-\alpha_\tau(y)\|\leqslant\|x-y\|,\ \forall x,\ y\in E.$$

令 $\alpha(x)=\sum_{\tau\in T}\alpha_\tau(x)$ （$x\in G$）. 由于$\{V_\tau | \tau\in T\}$是G的开覆盖且是局部有限的，故此和实为有限和，且$\alpha(x)>0$，$\forall x\in G$.又令

$$\lambda_\tau(x)=[\alpha(x)]^{-1}\alpha_\tau(x),\quad x\in G.$$

很明显$\lambda_\tau(x)$在G上满足局部Lipschitz条件，且

$$\lambda_\tau(x)\geqslant 0,\ \sum_{\tau\in T}\lambda_\tau(x)=1,\ \forall x\in G. \tag{3.1.1}$$

现任取$x_\tau\in V_\tau$，并令

$$g_\varepsilon(x)=\sum_{\tau\in T}\lambda_\tau(x)g(x_\tau),\ \forall x\in G. \tag{3.1.2}$$

显然，（3.1.2）右端实际是有限和（对每一个$x\in G$），并且$g_\varepsilon: G\to E_1$满足局部Lipschitz条件.我们有

$$\|g_\varepsilon(x)-g(x)\| = \|\sum_{\tau\in T}\lambda_\tau(x)[g(x_\tau)-g(x)]\|$$
$$\leqslant \sum_{\tau\in T}\lambda_\tau(x)\cdot\|g(x_\tau)-g(x)\|. \qquad (3.1.3)$$

若对某$x\in G$有$\lambda_\tau(x)\neq 0$，则$x\in V_\tau\subset U_\varepsilon(x')$（对某$x'\in G$）.注意到$x_\tau\in V_\tau$，我们有

$$\|g(x_\tau)-g(x)\| \leqslant \|g(x_\tau)-g(x')\|+\|g(x')-g(x)\|$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

于是，由（3.1.3）式，得$\|g_\varepsilon(x)-g(x)\|<\varepsilon, \forall x\in G$. □

定理3.1.1 （近似解的存在性）.设$f\in C[R_0, E]$，这里$R_0=[t_0, t_0+a]\times B(x_0,b), B(x_0, b)=\{x\in E \mid \|x-x_0\|\leqslant b\}$；且$\|f(t, x)\|\leqslant M$，$\forall (t, x)\in R_0$.则对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$x_\varepsilon\in C^1[[t_0, t_0+a_\varepsilon], B(x_0, b)]$（这里$a_\varepsilon=\min\{a, \frac{b}{M+\varepsilon}\}$）使得

$$\begin{cases} x_\varepsilon'(t)=f(t, x_\varepsilon(t))+y_\varepsilon(t), \quad x_\varepsilon(t_0)=x_0, \\ \|y_\varepsilon(t)\|\leqslant\varepsilon, \quad \forall t\in[t_0, t_0+a_\varepsilon]. \end{cases} \qquad (3.1.4)$$

证 由Dugundji延拓定理(参见Dugundji[1])，f可延拓成$f^*\in C[R^1\times E, E]$，且$\|f^*(t, x)\|\leqslant M$，$\forall (t,x)\in R^1\times E$.根据引理3.1.1,存在$f_\varepsilon^*: R^1\times E\to E$，$f_\varepsilon^*$满足局部Lipschitz条件，并且

$$\|f_\varepsilon^*(t, x)-f^*(t,x)\|<\varepsilon, \quad \forall t\in R^1, x\in E. \qquad (3.1.5)$$

考察初值问题

$$x'=f_\varepsilon^*(t, x), \quad x(t_0)=x_0. \qquad (3.1.6)$$

设此问题的饱和解为$x_\varepsilon(t)$，其最大存在区间为$[t_0, \eta)$。下证$\eta=+\infty$.实际上，若$\eta<+\infty$,则由（3.1.5）及（3.1.6）两式得

$\|x_\varepsilon'(t)\|=\|f_\varepsilon^*(t,\ x_\varepsilon(t))\|\leqslant M+\varepsilon,\ \forall t\in[t_0,\ \eta)$，从而，根据中值定理（定理1.2.1）知

$$\|x_\varepsilon(t)-x_\varepsilon(t')\|\leqslant(M+\varepsilon)\cdot|t-t'|,\ \forall t,\ t'\in[t_0,\eta).$$

由此可知$\lim\limits_{t\to\eta-0}x_\varepsilon(t)=x^*$存在.根据定理2.2.2知$x^*\in\partial E$.但显然$\partial E=\phi$.故得出了矛盾.因此$\eta=+\infty$，即$x_\varepsilon(t)$在$[t_0,\ +\infty)$上有定义.

由于

$$x_\varepsilon(t)=x_0+\int_{t_0}^t f_\varepsilon^*(s,\ x_\varepsilon(s))ds,\ t\in[t_0,\ +\infty),$$

故知：当$t\in[t_0,\ t_0+a_\varepsilon]$时，有

$$\begin{aligned}\|x_\varepsilon(t)-x_0\|&\leqslant\int_{t_0}^t\|f_\varepsilon^*(s,\ x_\varepsilon(s))\|ds\\&\leqslant(M+\varepsilon)(t-t_0)\leqslant(M+\varepsilon)a_\varepsilon\leqslant b,\end{aligned}$$

从而　$x_\varepsilon\in C^1[[t_0,\ t_0+a_\varepsilon],\ B(x_0,\ b)]$，且

$$f^*(t,\ x_\varepsilon(t))\equiv f(t,\ x_\varepsilon(t)),\ \forall t\in[t_0,\ t_0+a_\varepsilon].\tag{3.1.7}$$

令$y_\varepsilon(t)=f_\varepsilon^*(t,x_\varepsilon(t))-f^*(t,x_\varepsilon(t)),t\in[t_0,\ t_0+a_\varepsilon]$. 于是，由（3.1.6），（3.1.5）以及（3.1.7）三式，即知（3.1.4）式成立.证完. □

定理3.1.2（解的存在性）　设$f\in C[R_0,\ E]$，$\|f(t,\ x)\|\leqslant M$，$\forall(t,\ x)\in R_0$，并且f在R_0上一致连续.又设$g\in C[[t_0,\ t_0+a]\times[0,\ 2b],\ R^1]$，$g(t,\ 0)\equiv0$，且问题（2.2.1）在$[t_0,\ t_0+a]$上只有零解$u\equiv0$.假定

$$\alpha(f(t,S))\leqslant g(t,\alpha(S)),\forall t\in[t_0,t_0+a],S\subset B[x_0,b),\tag{3.1.8}$$

其中$\alpha(\cdot)$表非紧性测度.则对满足$0<a'\leqslant a$，$a'<\frac{b}{M}$的任何

α'，Cauchy问题（2.1）在 $[t_0, t_0+\alpha']$ 上至少具有一个解 $x\in C^1[[t_0, t_0+\alpha'], B(x_0, b)]$。

证 令$\alpha'=\dfrac{b}{M+\varepsilon}$（即 $\varepsilon=\dfrac{b-\alpha' M}{\alpha'}>0$），则$\alpha'=$

$\min\left\{a, \dfrac{b}{M+\varepsilon}\right\}$.根据定理3.1.1，存在$x_n\in C^1[[t_0,t_0+\alpha'], B(x_0, b)]$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ 使得

$$\begin{cases} x_n'(t)=f(t, x_n(t))+y_n(t), & x_n(t_0)=x_0, \\ \|y_n(t)\|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{n}, & t\in[t_0, t_0+\alpha'], (n=1, 2, 3, \cdots). \end{cases} \tag{3.1.9}$$

我们只需证明$\{x_n(t)\}$是$C[[t_0, t_0+\alpha'], E]$中相对紧集，因为这时可从$\{x_n(t)\}$中选出一致收敛的子列，$\{x_{n_k}(t)\}$，再根据定理2.1.1即知其极限$x\in C^1[[t_0, t_0+\alpha'], B(x_0, b)]$，并且是问题（2.1）在$[t_0, t_0+\alpha']$上的解。

根据（3.1.9）式，我们有

$$\|x_n'(t)\|\leqslant M+\varepsilon, \quad t\in[t_0,t_0+\alpha'],(n=1,2,3,\cdots), \tag{3.1.10}$$

故易知$\{x_n(t)\}$是等度连续的.于是，由定理1.1.3，我们只需证明对每个$t\in[t_0, t_0+\alpha']$，集$B_1(t)=\{x_n(t)\,|\,n=1,2,3,\cdots\}$是$E$中相对紧集，即需证明非紧性测度$m(t)=\alpha(B_1(t))=0$。

令$B_k(t)=\{x_n(t)\,|\,n=k, k+1, \cdots\}$.显然

$$\alpha(B_k(t))=\alpha(B_1(t))=m(t) \quad (k=1, 2, 3, \cdots). \tag{3.1.11}$$

由定理1.1.1（vi）及（3.1.10）式，我们有

$$|m(t)-m(s)|\leqslant\alpha(\{x_n(t)-x_n(s)\,|\,n\geqslant k\})\leqslant 2(M+\varepsilon)|t-s|,$$

故$m(t)$是$[t_0,\ t_0+a']$上的连续函数．由于$h>0$时，

$$\frac{1}{h}[m(t)-m(t-h)]\leqslant\alpha\left(\left\{\frac{x_n(t)-x_n(t-h)}{h}\middle|n\geqslant k\right\}\right)$$

$$\leqslant\alpha(\overline{co}B_k'(I_h))=\alpha(B_k'(I_h)),\qquad(3.1.12)$$

其中$I_h=[t-h,\ t]$，$B_k'(I_h)=\bigcup_{t\in I_h}B_k'(t)$，$B_k'(t)=\{x_n'(t)|n\geqslant k\}$．

故对Dini导数D_-，有

$$D_-m(t)\leqslant\varliminf_{h\to+0}\alpha(B_k'(I_h)),\ t\in(t_0,t_0+a'],\ (k=1,2,3\cdots).\qquad(3.1.13)$$

由（3.1.9）式我们有

$$\alpha(B_k'(I_h))\leqslant\alpha(f(I_h,\ B_k(I_h)))+\alpha(\{y_n(I_h)|n\geqslant k\})$$

$$\leqslant\alpha(f(I_n,\ B_k(I_h)))+\frac{2\varepsilon}{k},(k=1,2,3,\cdots).\qquad(3.1.14)$$

根据$\{x_n(t)\}$的等度连续性以及f的一致连续性，我们有：Hausdorff距离

$$d_H(f(I_h,\ B_k(I_h)),\ f(t,\ B_k(t)))\to0,\ h\to+0\text{时，}$$

从而，由定理1.1.1(viii)知

$$\alpha(f(I_h,\ B_k(I_h)))\to\alpha(f(t,\ B_k(t))),\ h\to+0\text{时．}\qquad(3.1.15)$$

于是，由（3.1.13）～（3.1.15）诸式，并注意到（3.1.8）式，得

$$D_-m(t)\leqslant g(t,m(t))+\frac{2\varepsilon}{k},\ t\in(t_0,\ t_0+a'].\qquad(3.1.16)$$

由此，并注意到$m(t_0)=0<\frac{2\varepsilon}{k}$，应用定理1.2.6知

$$m(t)\leqslant r_k(t),\ t\in[t_0,\ t_0+a'],\qquad(3.1.17)$$

其中$r_k(t)$表初值问题

$$u'=g(t,\ u)+\frac{2\varepsilon}{k},\ u(t_0)=\frac{2\varepsilon}{k}$$

的最大解．再根据定理1.2.5以及本定理的假设知，$r_k(t)$在$[t_0,\ t_0+\alpha']$上一致趋于零（当$k\to\infty$时），从而由（3.1.17）式即得$m(t)=0$，$\forall t\in[t_0,\ t_0+\alpha']$.证完，□

系3.1.1 设$f\in C[R_0,\ E]$，$\|f(t,\ x)\|\leqslant M$，$\forall(t,\ x)\in R_0$，并且f在R_0上一致连续.又设存在常数$L>0$使

$$\alpha(f(t,\ S))\leqslant L\alpha(S),\forall t\in[t_0,t_0+a],S\subset B(x_0,\ b). \tag{3.1.18}$$

则对满足$0<\alpha'\leqslant a$，$\alpha'<\frac{b}{M}$的任何α'，Cauchy问题(2.1)在$[t_0,\ t_0+\alpha']$上至少具有一个解$x\in C^1[[t_0,\ t_0+\alpha'],B(x_0,\ b)]$.

证 在定理3.1.2中令$g(t,\ u)=Lu$即获证.□

注意，当g满足

$$\|f(t,\ x)-f(t,\ y)\|\leqslant g(t,\ \|x-y\|)$$

且$g(t,\ u)$关于u是增函数时，（3.1.8）式必满足，故知定理3.1.2中关于g的条件比定理2.2.1中关于g的条件弱．同样，系3.1.1中的条件（3.1.18）式比系2.2.1中的Lipschitz条件（2.2.11）式弱．

定理3.1.3 设$f\in C[R_0,E]$，$\|f(t,x)\|\leqslant M$，$\forall(t,x)\in R_0$. 设$g:[0,\ 2b]\to R^1$连续，$g(0)=0$，且初值问题

$$u'=g(u),\ u(t_0)=0 \tag{3.1.19}$$

在$[t_0,\ t_0+a]$上只有零解$u(t)\equiv0$.假定

$$\alpha(f([t_0,\ t_0+a]\times S))\leqslant g(\alpha(S)),\ \forall S\subset B(x_0,\ b).$$

(3.1.20)

则对满足 $0<\alpha'\leqslant a,\alpha'<\dfrac{b}{M}$ 的任何 α'，Cauchy 问题（2.1）在 $[t_0,\ t_0+\alpha']$ 上至少具有一个解 $x\in C^1[[t_0,\ t_0+\alpha'],B(x_0,\ b)]$。

证 证明与定理3.1.2一样，一直到（3.1.14）式．由（3.1.14）式与（3.1.20）式，得

$$\alpha(B_k'(I_h))\leqslant g(\alpha(B_k(I_h)))+\frac{2\varepsilon}{k}(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$$

(3.1.20)

由 $\{x_n(t)\}$ 的等度连续性知

$$d_H(B_k(I_h),\ B_k(t))\to 0\text{，当}h\to+0\text{时，}$$

从而

$$\alpha(B_k(I_h))\to\alpha(B_k(t))\text{，当}h\to+0\text{时．}\qquad(3.1.21)$$

于是，由（3.1.13），（3.1.20），（3.1.21）诸式，得

$$D_-m(t)\leqslant g(m(t))+\frac{2\varepsilon}{k},\ t\in(t_0,\ t_0+\alpha'].$$

以下证明与定理3.1.2类似，从略．□

系3.1.2 设 $f\in C[R_0,\ E]$，$\|f(t,\ x)\|\leqslant M$，$\forall\ (t,\ x)\in R_0$．又设存在常数 $L>0$ 使

$$\alpha(f([t_0,\ t_0+a]\times S))\leqslant L\alpha(S),\ \forall S\subset B(x_0,\ b).$$

(3.1.22)

则对满足 $0<\alpha'\leqslant a,\ \ \alpha'<\dfrac{b}{M}$ 的任何 α'，Cauchy问题（2.1）在 $[t_0,\ t_0+\alpha']$ 上至少具有一个解．

注意，定理3.1.3和定理3.1.2的区别在于：定理3.1.3去掉了关于f一致连续性的假定，但把条件（3.1.8）加强为（3.1.20）。

3.2 最大解与最小解

设P是实Banach空间E中某锥。由P产生的半序记为$\leqslant$，即$x\leqslant y$，如果$y-x\in P$。锥P称为是**正规的**，如果存在常数$N>0$使$\theta\leqslant x\leqslant y\Longrightarrow \|x\|\leqslant N\|y\|$。有关锥的详细讨论，请参见郭大钧〔1〕和郭大钧与V.Lakshmikantham〔3〕。

设$f\in C[I\times E, E]$，这里$I=[t_0, T]$。函数$v\in C^1[I, E]$叫做初值问题（2.1）在I上的一个**下解**，如果$v'\leqslant f(t, v)$，$v(t_0)\leqslant x_0$；同样，$w\in C^1[I, E]$叫做(2.1)在I上的一个**上解**，如果$w'\geqslant f(t,w)$，$w(t_0)\geqslant x_0$。

定理3.2.1 设锥P是正规的且$(a)$$v_0$与$w_0$分别是(2.1)的下解与上解，并且$v_0(t)\leqslant w_0(t)$，$t\in I$；

(b)存在$M>0$使

$f(t, u)-f(t, \bar{u})\geqslant -M(u-\bar{u})$，$\forall v_0(t)\leqslant\bar{u}\leqslant u\leqslant w_0(t)$；

(c)存在常数$L>0$，使对E中任何有界集B，有

$$\alpha(f(I\times B))\leqslant L\alpha(B).$$

则初值问题（2.1）在$C[I, E]$中区间$[v_0, w_0]$上必具有最大解$w\in C^1[I, E]$和最小解$v\in C^1[I, E]$；并且

$$w(t)=\lim_{n\to\infty}w_n(t),\quad v(t)=\lim_{n\to\infty}v_n(t),\quad t\in I, \tag{3.2.1}$$

其中

$$\begin{cases} w_n(t)=e^{-M(t-t_0)}\left\{x_0+\int_{t_0}^{t}e^{M(s-t_0)}[f(s,w_{n-1}(s))\right.\\ \qquad\qquad\left.+Mw_{n-1}(s)]ds\right\}, \\ v_n(t)=e^{-M(t-t_0)}\left\{x_0+\int_{t_0}^{t}e^{M(s-t_0)}[f(s,v_{n-1}(s))\right.\\ \qquad\qquad\left.+Mv_{n-1}(s)]ds\right\}, \end{cases}$$

$$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots),$$

它们满足

$$v_0(t)\leqslant v_1(t)\leqslant\cdots\leqslant v_n(t)\leqslant\cdots\leqslant v(t)\leqslant w(t)\leqslant\cdots\leqslant w_n(t)$$
$$\leqslant\cdots\leqslant w_1(t)\leqslant w_0(t),\ \forall t\in I. \qquad (3.2.2)$$

证 对任何固定的$\eta\in[v_0,\ w_0]\subset C[I,\ E]$，考察线性微分方程初值问题

$$u'=f(t,\ \eta)-M(u-\eta),\ u(t_0)=x_0. \qquad (3.2.3)$$

直接验证易知函数

$$u=e^{-M(t-t_0)}\left\{x_0+\int_{t_0}^{t}e^{M(s-t_0)}[f(s,\eta(s))+M\eta(s)]ds\right\}$$

$$(3.2.4)$$

属于$C^1[I,\ E]$且是问题（3.2.3）在I上的解．下证（3.2.3）的解唯一．事实上，设u，$u_1\in C^1[I,\ E]$都是（3.2.3）在I上的解．则$u_2=u-u_1$满足

$$u_2'=-Mu_2,\ t\in I;\qquad u_2(t_0)=\theta.$$

于是

$$(u_2e^{Mt})'=(u_2'+Mu_2)e^{Mt}=\theta,\ t\in I,$$

故由系1.2.1知$u_2\equiv\theta$，$t\in I$．唯一性获证．

定义算子$A:[v_0, w_0]\to C[I,E]$如下：$A\eta=u$，u为(3.2.3)的唯一解，即

$$A\eta=e^{-M(t-t_0)}\left\{x_0+\int_{t_0}^{t}e^{M(s-t_0)}[f(s,\eta(s))+M\eta(s)]ds. \right. \tag{3.2.5}$$

显然，η是问题（2.1）的解当且仅当$\eta=A\eta$，即η是A的不动点.由假定(b)得

$$f(t, u)+Mu\geqslant f(t, \bar{u})+M\bar{u}, \quad \forall v_0(t)\leqslant\bar{u}\leqslant u\leqslant w_0(t),$$

即$f(t, u)+Mu$是u的增函数，从而根据（3.2.5）式知

$$\eta_1, \eta_2\in[v_0, w_0], \ \eta_1\leqslant\eta_2\Rightarrow A\eta_1\leqslant A\eta_2, \tag{3.2.6}$$

即A是增算子.下证

$$v_0\leqslant Au_0, \quad Aw_0\leqslant w_0. \tag{3.2.7}$$

令$v_1=Av_0$.对任何$\varphi\in P^*$，令$p(t)=\varphi[v_1(t)-v_0(t)]$.由假定(a)知$p(t_0)\geqslant 0$，且

$$p'\geqslant\varphi[f(t, v_0)-M(v_1-v_0)-f(t, v_0)]=-Mp, t\in I,$$

从而

$$(pe^{Mt})'=(p'+Mp)e^{Mt}\geqslant 0, \quad t\in I,$$

由此并注意到$p(t_0)\geqslant 0$，即知$p(t)\geqslant 0$，$t\in I$. 故$v_1(t)\geqslant v_0(t)$，$t\in I$，即$Av_0\geqslant v_0$.同理可证$Aw_0\leqslant w_0$. 作迭代序列

$$v_n=Av_{n-1}, \quad w_n=Aw_{n-1} \quad (n=1, 2, 3, \cdots). \tag{3.2.8}$$

由（3.2.6）与（3.2.7）两式知

$$v_0\leqslant v_1\leqslant\cdots\leqslant v_n\leqslant\cdots\leqslant w_n\leqslant\cdots\leqslant w_1\leqslant w_0. \tag{3.2.9}$$

又，我们有

$$v_n'=f(t, v_{n-1})-M(v_n-v_{n-1}), \quad (n=1, 2, 3, \cdots).$$

(3.2.10)

由P的正规性知$C[I, E]$中锥$P_I=\{x\in C[I, E] | x(t)\geqslant\theta, \forall t\in I\}$是正规的，从而（参见郭大钧[1]）区间$[v_0, w_0]$是$C[I, E]$中有界集，于是，注意到（3.2.10）式及假定（$c$）知$\{v_n'\}$是$C[I, E]$中有界集，由此，利用中值定理知$\{v_n\}$是等度连续的.下证，对任何$t\in I$，集$B(t)=\{v_n(t) | n=0, 1, 2, \cdots\}$是$E$中相对紧集.令$B_1(t)=B(t)\setminus\{v_0(t)\}, B_1'(t)=\{v_n'(t) | n=1, 2, 3, \cdots\}$，$m(t)=\alpha(B(t))=\alpha(B_1(t))$.仿（3.1.12）式，我们有

$$\frac{1}{h}[m(t)-m(t-h)]\leqslant\alpha\left(\left\{\frac{v_n(t)-v_n(t-h)}{h}\,\middle|\, n\geqslant 1\right\}\right)$$

$$\leqslant\alpha(\overline{co}B_1'(I_h))=\alpha(B_1'(I_h)), \qquad (3.2.11)$$

其中$I_h=[t-h, t]$，$B_1'(I_h)=\bigcup_{t'\in I_h}B_1'(t')$.故知

$$D_-m(t)\leqslant\varliminf_{h\to+0}\alpha(B_1'(I_h)), \quad t\in(t_0, T]. \qquad (3.2.12)$$

由（3.2.10）式和假定(c)，知

$$\alpha(B_1'(I_h))\leqslant\alpha(f(I_h\times B(I_h))+M\alpha(B_1(I_h))$$
$$+M\alpha(B(I_h))$$
$$\leqslant(L+M)\alpha(B(I_h))+M\alpha(B_1(I_h)), \qquad (3.2.13)$$

其中$B(I_h)=\bigcup_{t'\in I_h}B(t')$，$B_1(I_h)=\bigcup_{t'\in I_h}B_1(t')$.注意到$\{v_n\}$的等度连续性，知

$$\lim_{h\to+0}\alpha(B(I_h))=\alpha(B(t))=m(t), \qquad (3.2.14)$$

$$\lim_{h\to+0}\alpha(B_1(I_h))=\alpha(B_1(t))=m(t). \qquad (3.2.15)$$

于是，由（3.2.12），（3.2.13），（3.2.14）以及(3.2.15)诸式，得

$$D_-m(t)\leqslant(L+2M)m(t), \quad t\in(t_0, T]. \qquad (3.2.16)$$

由此，注意到$m(t_0)=0$，利用定理1.2.5，即知$m(t)\equiv 0$，$\forall t\in I$.故$B(t)$是E中相对紧集.根据定理1.1.3知，$\{v_n\}$是$C[I, E]$中相对紧集.从而，存在子列$\{v_{n_i}\}$及$v\in C[I, E]$，使

$$\|v_{n_i}-v\|_c=\max_{t\in I}\|v_{n_i}(t)-v(t)\|\to 0\ (i\to\infty).\quad(3.2.17)$$

由（3.2.9）式知

$$v_{n_i}\leqslant v_n\leqslant v,\quad \forall n>n_i,$$

于是，由P_I的正规性，得

$$\|v-v_n\|_c\leqslant N\|v-v_{n_i}\|_c,\quad \forall n>n_i.$$

由此，注意到（3.2.17）式知，$\|v-v_n\|_c\to 0$ $(n\to\infty)$，即$v_n(t)$在I上一致收敛于$v(t)$（$n\to\infty$时）. 根据（3.2.10）式，利用系2.1.1，即知$v\in C^1[I, E]$且

$$v'(t)=f(t, v(t)),\ t\in I;\ v(t_0)=x_0.$$

即v是问题（2.1）的解. 同理可证，$w_n(t)$在I上一致收敛于某$w(t)\in C^1[I, E]$，且w是问题（2.1）的解.很明显，（3.2.2）式成立.

最后，证明w与v分别是问题（2.1）在$[v_0, w_0]$中的最大解与最小解.设$u\in[v_0, w_0]$是（2.1）的任一解. 于是，$v_0\leqslant u\leqslant w_0$，$Au=u$. 由（3.2.6）式知$Av_0\leqslant Au\leqslant Aw_0$，即$v_1\leqslant u\leqslant w_1$.由归纳法易知

$$v_n\leqslant u\leqslant w_n\ (n=0, 1, 2, \cdots).$$

令$n\to\infty$取极限，得$v\leqslant u\leqslant w$，即$v(t)\leqslant u(t)\leqslant w(t)$，$\forall t\in I$. 证完. □

例3.2.1 考察无穷微分方程组

$$\begin{cases}x_n'=\dfrac{1}{2n}[(t-x_n)^3+x_{2n+1}^4],\quad 0\leqslant t\leqslant 1;\\ x_n(0)=0,\quad (n=1, 2, 3, \cdots).\end{cases}\quad(3.2.18)$$

试证．方程组（3.2.18）必具有满足 $0\leqslant x_n\leqslant\frac{t}{n}$（$0\leqslant t\leqslant 1$；$n=1, 2, 3, \cdots$）的最大解和最小解。

证 取 $E=c_0=\{x=(x_1, x_2, \cdots)\mid x_n\to 0\}$，范数 $\|x\|=\sup\limits_n|x_n|$。于是，方程组（3.2.18）可以写成 c_0 中的微分方程

$$\begin{cases}x'=f(t, x), & 0\leqslant t\leqslant 1,\\ x(0)=\theta,\end{cases}\tag{3.2.19}$$

其中 $f=(f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots)$，$f_n=\frac{1}{2n}[(t-x_n)^3+x_{2n+1}^4]$，$\theta=(0, 0, \cdots, 0, \cdots)$。显然 $f\in C[[0, 1]\times c_0, c_0]$。

令 $v_0(t)=(0, 0, \cdots, 0, \cdots)$，$w_0(t)=\left(t, \frac{t}{2}, \cdots, \frac{t}{n}, \cdots\right)$，$P=\{x=(x_1, x_2, \cdots)\in c_0\mid x_n\geqslant 0, n=1, 2, 3, \cdots\}$。则 P 是 c_0 中正规锥，且 $v_0(t)<w_0(t)$，$t\in(0, 1]$。又 v_0，$w_0\in C^1[[0, 1], c_0]$。由于 $v_0(0)=\theta$，$w_0(0)=\theta$，

$$\begin{aligned}v_0'(t)&=(0, 0, \cdots, 0, \cdots)\leqslant\left(\frac{1}{2}t^3, \frac{1}{4}t^3, \cdots, \frac{1}{2n}t^3, \cdots\right)\\&=f(t, v_0(t)), \quad t\in[0, 1];\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}w_0'(t)&=\left(1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right)>\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{t^4}{3^4}, \cdots,\right.\\&\qquad\left.\frac{1}{2n}\left[\left(t-\frac{t}{n}\right)^3+\frac{t^4}{(2n+1)^4}\right], \cdots\right)\\&=f(t, w_0(t)), \quad t\in[0, 1],\end{aligned}$$

故 v_0，w_0 分别是（3.2.19）的下解与上解。又由于当 $u=(u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots)\in c_0$，$\overline{u}=(\overline{u}_1, \overline{u}_2, \cdots, \overline{u}_n, \cdots)\in c_0$ 满足 $v_0(t)$

$\leqslant \overline{u} \leqslant u \leqslant w_0(t)$（即 $0 \leqslant \overline{u_n} \leqslant u_n \leqslant \frac{t}{n}$，$n=1, 2, 3, \cdots$）时，我们有

$$f_n(t, u) - f_n(t, \overline{u}) = \frac{1}{2n}[(t-u_n)^3 + u_{n+1}^4 - (t-\overline{u_n})^3 - \overline{u}_{2n+1}^4]$$

$$\geqslant \frac{1}{2n}[(t-u_n)^3 - (t-\overline{u_n})^3]$$

$$\geqslant -\frac{3}{2n}(u_n - \overline{u_n}) \geqslant -\frac{3}{2}(u_n - \overline{u_n}), \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

（这是因为 $\frac{\partial}{\partial s}(t-s)^3 = -3(t-s)^2 \geqslant -3$，$\forall\, 0 \leqslant s \leqslant t$，$0 \leqslant t \leqslant 1$），故定理3.2.1中的条件($b$)满足，其中 $M=\frac{3}{2}$.

再证定理3.2.1中条件(c)满足．事实上，对 c_0 中任何有界集 B，任取 $\{x^{(m)}\} \subset B$，这里 $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \cdots, x_n^{(m)}, \cdots)$．令 $y^{(m)} = (y_1^{(m)}, y_2^{(m)}, \cdots, y_n^{(m)}, \cdots)$，$y_n^{(m)} = \frac{1}{2n}[(t^{(m)} - x_n^{(m)})^3 + x_{2n+1}^{(m)4}]$，其中 $\{t^{(m)}\}$ 是$[0, 1]$中任一序列．即 $y^{(m)} = f(t^{(m)}, x^{(m)})$ $(m=1, 2, 3, \cdots)$．由于

$$|y_n^{(m)}| \leqslant \frac{1}{2n}[(1 + \|x^{(m)}\|)^3 + \|x^{(m)}\|^4], \qquad (3.2.20)$$

故 $\{y_n^{(m)}\}$ $(n=1, 2, 3, \cdots; m=1, 2, 3, \cdots)$ 是有界的，从而由对角线法易知，存在 $\{m\}$ 的子列 $\{m_k\}$ 使

$$\lim_{k\to\infty} y_n^{(m_k)} = y_n \quad (n=1, 2, 3, \cdots).$$

再由（3.2.20）式易知 $y=(y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots) \in c_0$ 且 $\|y^{(m_k)}$

$-y\|=\sup_n|y_n^{(m_k)}-y_n|\to 0\ (k\to\infty)$. 由此可知，$f([0,1]\times B)$是$c_0$中相对紧集，故定理3.2.1的条件$(c)$满足. 于是，由定理3.2.1即获所述结论.证完.

在Lakshmikantham，Leela和Vatsala[1]中，引入了初值问题（2.1）的**拟解对**和**拟上、下解对**的概念.

设

$$f(t,u)=f_0(t,u)+f_1(t,u)+f_2(t,u),\qquad(3.2.21)$$

其中$f_i\in C[I\times E,E]$ $(i=0,1,2)$ $I=[t_0,T]$. 函数对v_0，$w_0\in C^1[I,E]$叫做问题（2.1）的**拟下、上解对**，如果

$$\begin{cases}v_0'\leqslant f_0(t,v_0)+f_1(t,v_0)+f_2(t,w_0),v_0(t_0)\leqslant x_0;\\ w_0'\geqslant f_0(t,w_0)+f_1(t,w_0)+f_2(t,v_0),w_0(t_0)\geqslant x_0.\end{cases}\qquad(3.2.22)$$

若上式中的四个不等号均成为等号，则称v_0，w_0是问题（2.1）的**拟解对**.

定理3.2.2 设锥P是正规的且f具有分解式（3.2.21）. 又设$(a)v_0$，w_0是问题（2.1）的一对拟下、上解，并且$v_0(t)\leqslant w_0(t)$，$t\in I$；(b) 存在$M>0$，使

$$f_0(t,u)-f_0(t,\overline{u})\geqslant-M(u-\overline{u}),\forall\ v_0(t)\leqslant\overline{u}\leqslant u\leqslant w_0(t);$$

函数$f_1(t,u)$关于u是增的（即$u_1\leqslant u_2\Rightarrow f_1(t,u_1)\leqslant f_1(t,u_2)$），$f_2(t,u)$关于$u$是减的；$(c)$存在常数$L>0$，使对$E$中任何有界集$B$，有

$$\alpha(f_i(I\times B))\leqslant L\alpha(B),\ (i=0,1,2).$$

则初值问题(2.1)在$C[I,E]$中区间$[v_0,w_0]$上必具有最小最大拟解对$\overline{v}$，$\overline{w}\in C^1[I,E]$，即对(2.1)在$[v_0,w_0]$上的任何拟解对v，w，均满足

$$\overline{v}(t)\leqslant v(t),\ w(t)\leqslant\overline{w}(t),\ t\in I.\qquad(3.2.23)$$

并且

$$\overline{w}(t)=\lim_{n\to\infty}w_n(t),\quad \overline{v}(t)=\lim_{n\to\infty}v_n(t),\quad t\in I, \tag{3.3.24}$$

其中

$$\begin{cases} v_n(t)=e^{-M(t-t_0)}\left\{x_0+\int_{t_0}^{t}e^{M(s-t_0)}[f_0(s),\ v_{n-1}(s))\right.\\ \qquad\left.+f_1(s,\ v_{n-1}(s))+f_2(s,w_{n-1}(s))+Mv_{n-1}(s)]ds\right\},\\ w_n(t)=e^{-M(t-t_0)}\left\{x_0+\int_{t_0}^{t}e^{M(s-t_0)}[f_0(s,w_{n-1}(s))\right.\\ \qquad\left.+f_1(s,w_{n-1}(s))+f_2(s,v_{n-1}(s))+Mw_{n-1}(s)]ds\right\}, \end{cases}$$

$$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

它们满足

$$v_0(t)\leqslant v_1(t)\leqslant\cdots\leqslant v_n(t)\leqslant\cdots\leqslant\overline{v}(t)\leqslant\overline{w}(t)\leqslant\cdots\leqslant w_n(t)$$
$$\leqslant\cdots\leqslant w_1(t)\leqslant w_0(t),\quad t\in I. \tag{3.2.25}$$

证 对任何固定的η_1，$\eta_2\in[v_0,\ w_0]$，考察线性微分方程初值问题

$$\begin{cases} u'=f_0(t,\ \eta_1)+f_1(t,\eta_1)+f_2(t,\eta_2)-M(u-\eta_1),\\ u(t_0)=x_0. \end{cases} \tag{3.2.26}$$

仿定理3.2.1的证明，可知问题（3.2.26）在I上具有唯一解$u\in C^1[I,\ E]$，且u具有下面的表达式：

$$u=e^{-M(t-t_0)}\left\{x_0+\int_{t_0}^{t}e^{M(s-t_0)}[f_0(s,\eta_1(s))\right.$$
$$\left.+f_1(s,\eta_1(s))+f_2(s,\eta_2(s))+M\eta_1(s)]ds\right\}. \tag{3.2.27}$$

定义算子$A:[v_0,\ w_0]\times[v_0,\ w_0]\to C[I,\ E]$如下：
$A[\eta_1,\ \eta_2]=u$，u为（3.2.26）的唯一解，即

$$A[\eta_1,\eta_2]=e^{-M(t-t_0)}\left\{x_0+\int_{t_0}^{t} e^{M(s-t_0)}[f_0(s,\eta_1(s))\right.$$

$$\left.+f_1(s,\eta_1(s))+f_2(s,\eta_2(s))+M\eta_1(s)]ds\right\}.$$

$$(3.2.28)$$

显然，η_1，η_2是问题（2.1)的拟解对当且仅当$\eta_1=A[\eta_1,\eta_2]$，$\eta_2=A[\eta_2,\ \eta_1]$.由（3.2.28）式和假定（$b$）易知 $A[\eta_1,\ \eta_2]$ 关于η_1是增的，关于η_2是减的，即

$$\eta,\ \eta_1,\ \eta_2\in[v_0,\ w_0],\ \eta_1\leqslant\eta_2\Rightarrow$$

$$A[\eta_1,\eta]\leqslant A[\eta_2,\eta],\ A[\eta,\eta_1]\geqslant A[\eta,\eta_2].\quad(3.2.29)$$

下证

$$v_0\leqslant A[v_0,w_0],\ A[w_0,\ v_0]\leqslant w_0.\qquad(3.2.30)$$

令$v_1=A[v_0,\ w_0]$.对任何$\varphi\in P^*$，令$p(t)=\varphi[v_1(t)-v_0(t)]$.由假定($a$)知$p(t_0)\geqslant 0$且

$$p'=\varphi[v_1'-v_0']\geqslant\varphi[f_0(t,v_0)+f_1(t,v_0)+f_2(t,w_0)$$
$$-M(v_1-v_0)-f_0(t,v_0)-f_1(t,v_0)-f_2(t,w_0))]$$
$$=-Mp,\ t\in I,$$

由此易知$p(t)\geqslant0,t\in I$；故$A[v_0,w_0]\geqslant v_0$获证.同理可证$A[w_0,v_0]\leqslant w_0$.

作迭代序列

$$v_n=A[v_{n-1},w_{n-1}],w_n=A[w_{n-1},v_{n-1}]\ (n=1,2,3,\cdots).$$

$$(3.2.31)$$

由（3.2.29）式与（3.2.30）式知

$$v_0\leqslant v_1\leqslant\cdots\leqslant v_n\leqslant\cdots\leqslant w_n\leqslant\cdots\leqslant w_1\leqslant w_0.\qquad(3.2.32)$$

又，我们有

$$\begin{cases} v_n' = f_0(t, v_{n-1}) + f_1(t, v_{n-1}) + f_2(t, w_{n-1}) - M(v_n - v_{n-1}), \\ w_n' = f_0(t, w_{n-1}) + f_1(t, w_{n-1}) + f_2(t, v_{n-1}) - M(w_n - w_{n-1}) \end{cases} \tag{3.2.33}$$

$(n = 1, 2, 3, \cdots)$.

仿定理3.2.1之证可知$\{v_n\}$和$\{w_n\}$都是等度连续的。对 $t \in I$，令 $B(t) = \{v_n(t) \mid n = 0, 1, 2, \cdots\}$，$B_1(t) = B(t) \setminus \{v_0(t)\}$，$B_1'(t) = \{v_n'(t) \mid n = 1, 2, 3, \cdots\}$，$B^*(t) = \{w_n(t) \mid n = 0, 1, 2, \cdots\}$，$B_1^*(t) = B^*(t) \setminus \{w_0(t)\}$，$B_1^{*\prime}(t) = \{w_n'(t) \mid n = 1, 2, 3, \cdots\}$，$m(t) = \alpha(B(t)) = \alpha(B_1(t))$，$m^*(t) = \alpha(B^*(t)) = \alpha(B_1^*(t))$。易知（3.2.11）式成立，故

$$D^- m(t) \leqslant \overline{\lim_{h \to +0}} \alpha(B_1'(I_h)), \quad t \in (t_0, T]. \tag{3.2.34}$$

由（3.2.33）式及假定（c）知

$$\begin{aligned} \alpha(B_1'(I_h)) &\leqslant \alpha(f_0(I_h \times B(I_h))) + \alpha(f_1(I_h \times B(I_h))) \\ &\quad + \alpha(f_2(I_h \times B^*(I_h))) + M\alpha(B_1(I_h)) + M\alpha(B(I_h)) \\ &\leqslant (2L + M)\alpha(B(I_h)) + M\alpha(B_1(I_h)) + L\alpha(B^*(I_h)), \end{aligned} \tag{3.2.35}$$

其中$B(I_h) = \bigcup_{t \in I_h} B(t)$，$B_1(I_h) = \bigcup_{t \in I_h} B_1(t)$，$B^*(I_h) = \bigcup_{t \in I_h} B^*(t)$。注意到$\{v_n\}$，$\{w_n\}$的等度连续性，知（3.2.14）式和（3.2.15）式成立，并且

$$\lim_{h \to +0} \alpha(B^*(I_h)) = \alpha(B^*(t)) = m^*(t). \tag{3.2.36}$$

于是，由（3.2.34）～（3.2.36）及（3.2.14），（3.2.15）诸式，得

$$D^- m(t) \leqslant (2L + 2M)m(t) + Lm^*(t). \tag{3.2.37}$$

同理可证

$$D^- m^*(t) \leqslant (2L + 2M)m^*(t) + Lm(t). \tag{3.2.38}$$

(3.2.37) 式与 (3.2.38) 式相加，得

$$D^-[m(t)+m^*(t)]\leqslant D^-m(t)+D^-m^*(t)$$
$$\leqslant(3L+2M)[m(t)+m^*(t)],\ t\in I. \qquad (3.2.39)$$

由此，注意到$m(t_0)=m^*(t_0)=0$，利用定理1.2.5,即知$m(t)=m^*(t)\equiv 0$，$t\in I$。故$\{v_n\}$，$\{w_n\}$都是$C[I,E]$中相对紧集.仿定理3.2.1之证可知：$v_n(t)$在I上一致收敛于某$\bar{v}(t)\in C[I,E]$，$w_n(t)$在I上一致收敛于某$\overline{w}(t)\in C[I,E]$.根据 (3.2.33) 式利用系2.1.1 (将方程组 (3.2.33) 视为一个方程，并对乘积空间应用之)，知$\bar{v}$，$\overline{w}\in C^1[I,E]$且

$$\bar{v}'=f_0(t,\bar{v})+f_1(t,\bar{v})+f_2(t,\overline{w}),\ \bar{v}(t_0)=x_0,$$
$$\overline{w}'=f_0(t,\overline{w})+f_1(t,\overline{w})+f_2(t,\bar{v}),\ \overline{w}(t_0)=x_0.$$

故$\bar{v}$，$\overline{w}$是问题 (2.1) 的拟解对. 最后证明. 对于 (2.1) 在$[v_0, w_0]$上的任何拟解对v，w，不等式 (3.2.23) 必成立.事实上，我们有$v_0\leqslant v$，$w\leqslant w_0$。假定$v_{n-1}\leqslant v$，$w\leqslant w_{n-1}$，则由 (3.2.29) 式知

$$v_n=A[v_{n-1},w_{n-1}]\leqslant A[v,w]=v,$$
$$v_n=A[v_{n-1},w_{n-1}]\leqslant A[w,v]=w,$$
$$w_n=A[w_{n-1},v_{n-1}]\geqslant A[v,w]=v,$$
$$w_n=A[w_{n-1},v_{n-1}]\geqslant A[w,v]=w.$$

故由归纳法知

$$v_n\leqslant v,\ w\leqslant w_n\ (n=0,1,2,\cdots).$$

再令$n\to\infty$取极限即得 (3.2.23) 式.□

3.3 闭集上解的存在性

定理3.3.1 设F是E中有界凸闭集，$f\in C[F,E]$，$\bar{x}_0\in$

F；$\|f(x)\|\leqslant M$，$\forall x\in F$；且存在常数$L>0$使

$$\alpha(f(B))\leqslant L\alpha(B),\ \forall B\subset F. \tag{3.3.1}$$

又设

$$\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}d(x+hf(x),\ F)=0,\ \forall x\in F.$$

则对任何$T>t_0$，初值问题

$$x'=f(x),\ x(t_0)=x_0 \tag{3.3.2}$$

在$I=[t_0,\ T]$上必具有属于F的解$x\in C^1[I,\ F]$。

证 1.先证对任何$\varepsilon>0$，存在多边形$x_\varepsilon\in C[I,\ F]$满足

$$\|x_\varepsilon(t)-x_0-\int_{t_0}^{t}f(x_\varepsilon(s))ds\|\leqslant 2\varepsilon(t-t_0),\ t\in I. \tag{3.3.3}$$

$x_\varepsilon\in C[I;\ F]$是多边形意即：存在分法$t_0<t_1<\cdots<t_i<\cdots<t_m=T$使得

$$\begin{cases}x_\varepsilon(t)=\dfrac{x_i-x_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}(t-t_{i-1})+x_{i-1},\ \forall\ t\in[t_{i-1},\ t_i],\\ x_i=x_\varepsilon(t_i)\in F,\ i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,m.\end{cases} \tag{3.3.4}$$

证明方法与引理2.3.2类似。假定$x_\varepsilon(t)$已在$[t_0,\ t_{i-1}]$上定义好了并且满足（3.3.3）式，今按下法在$[t_{i-1},\ t_i]$上定义$x_\varepsilon(t)$。令$\delta_i\in(0,\ \varepsilon]$是满足下列三条件的最大数：(a) $t_{i-1}+\delta_i\leqslant T$；(b) $x\in F$，$\|x-x_{i-1}\|\leqslant(M+\varepsilon)\delta_i\Rightarrow\|f(x)-f(x_{i-1})\|\leqslant\varepsilon$；(c) $d(x_{i-1}+\delta_i f(x_{i-1}),\ F)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\delta_i$；其中$x_{i-1}=x_\varepsilon(t_{i-1})$。

现令$t_i=t_{i-1}+\delta_i$，取$x_i\in F$使

$$\|x_{i-1}+\delta_i f(x_{i-1})-x_i\|\leqslant\delta_i\varepsilon, \tag{3.3.5}$$

并定义

$$x_\varepsilon(t)=\frac{x_i-x_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}(t-t_{i-1})+x_{i-1},\quad \forall\ t\in[t_{i-1},\ t_i].$$

(3.3.6)

下证，经有限步必达T，即对某m必有$t_m=T$，否则，$\delta_i\to 0$且$t_i\to\tau$，$\tau\leqslant T(i\to\infty)$.由$x_\varepsilon(t)$的做法，仿引理2.3.2的证明，可知

$$\|x_\varepsilon(t)-x_\varepsilon(s)\|\leqslant(M+\varepsilon)|t-s|,\quad t_0\leqslant t,\ s<\tau.$$

(3.3.7)

由此即知当$i\to\infty$时，$x_i=x_\varepsilon(t_i)\to z\in F$.由$f$连续性知，存在$\delta>0$使

$$\|x-z\|\leqslant\delta,\ x\in F\Rightarrow\|f(x)-f(z)\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.\qquad(3.3.8)$$

对此δ，又存在i_0使

$$i\geqslant i_0\Rightarrow\|x_{i-1}-z\|\leqslant\bar{\delta},\|f(x_{i-1})-f(z)\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.\quad(3.3.9)$$

其中$\bar{\delta}=\delta(M+\varepsilon+1)^{-1}$. 于是，由（3.3.8）式与（3.3.9）式知

$$x\in F,\ \|x-x_{i-1}\|\leqslant(M+\varepsilon)\bar{\delta},\ i\geqslant i_0\Rightarrow$$

$$\|x-z\|\leqslant\|x-x_{i-1}\|+\|x_{i-1}-z\|\leqslant\delta,$$

$$\|f(x)-f(x_{i-1})\|\leqslant\|f(x)-f(z)\|+\|f(z)-f(x_{i-1})\|$$

$$\leqslant\varepsilon.$$

取$\eta>0$使

$$d(z+\eta f(z),\ F)\leqslant\frac{\varepsilon}{6}\eta.$$

又，存在i_1，使

$$i\geqslant i_1\Rightarrow\|x_{i-1}-z\|\leqslant\frac{\varepsilon}{6}\eta.\ \|f(x_{i-1})-f(z)\|\leqslant\frac{\varepsilon}{6}.$$

从而

$$i\geq i_1\Rightarrow d(x_{i-1}+\eta f(x_{i-1}),\ F)\leq\|x_{i-1}-z\|$$
$$+d(z+\eta f(z),\ F)+\eta\|f(z)-f(x_{-1})\|\leq\frac{\varepsilon}{2}\eta.$$

综上述，可知$\delta_i\geq\min\{\varepsilon,\ \overline{\delta},\ \eta\}$，$\forall i\geq\max\{i_0,i_1\}$，此与$\delta_i\to 0$矛盾．于是，必有$m$使$t_m=T$．至于(3.3.3)式，可仿（2.3.15）式证之．

2．取$\{\varepsilon_n\}$使$\varepsilon_n>\varepsilon_{n+1}(n=1，2，3，\cdots)$且$\varepsilon_n\to 0$，并令$x_n(t)=x_{\varepsilon_n}(t)$．由于（参看（3.3.7）式）

$$\|x_n(t)-x_n(s)\|\leq(M+\varepsilon_1)|t-s|;t,\ s\in I,(n=1,2,3,\cdots),$$

故$\{x_n(t)\}$是等度连续的．令$m(t)=\alpha(\{x_n(t)|n\geq 1\})$．下证$m(t)=0$，$t\in I$．显然

$$m(t)=\alpha(\{x_n(t)|n\geq k\}),\ (k=1,\ 2,3,\cdots).\tag{3.3.10}$$

令 $y_n(t)=\int_{t_0}^{t}f(x_n(s))ds$，$m^*(t)=\alpha(\{y_n(t)|n\geq 1\})$，则

$y_n'(t)=f(x_n(t))$，且

$$m^*(t)=\alpha(\{y_n(t)|n\geq k\}),\ (k=1,2,3,\cdots).\tag{3.3.11}$$

由（3．3．10），（3．3．11）以及（3．3．3）三式知

$$m(t)\leq m^*(t)+4\varepsilon_k(T-t_0),\ (k=1,2,3,\cdots).\tag{3.3.12}$$

仿（3．2．11）式与（3．2．12）式，可得

$$D_-m^*(t)=\underline{\lim}_{h\to+0}\alpha(B_1'(I_h)),\ t\in(t_0,\ T].\tag{3.3.13}$$

其中$I_h=[t-h,\ t]$，$B_1'(I_h)=\bigcup_{t\in I_h}\{y_n'(t)|n\geq 1\}$．利用假定（3.3.1）式，我们有

$$\alpha(B_n'(I_h))=\alpha(\bigcup_{t\in I_h}\{f(x_n(t))|n\geq 1\})$$

$$\leqslant L\alpha(B_1(I_h)), \tag{3.3.14}$$

其中$B_1(I_h)=\bigcup_{t'\in I_h}\{x_n(t')|n\geqslant 1\}$.由$\{x_n(t)\}$的等度连续性，可知

$$\lim_{h\to+0}\alpha(B_1(I_h))=\alpha(\{x_n(t)|n\geqslant 1\})=m(t). \tag{3.3.15}$$

由（3.3.12）～（3.3.15）诸式，得

$$\begin{cases} D_-m^*(t)\leqslant Lm(t)\leqslant Lm^*(t)+\eta_k,(k=1,2,3,\cdots), \\ t\in(t_0,\ T],\ 其中\eta_k=4L(T-t_0)\varepsilon_k\to 0. \end{cases} \tag{3.3.16}$$

注意到$m^*(t_0)=0<\eta_k$，而普通常微分方程初值问题

$$u'=Lu,\ u(t_0)=0$$

只有零解，利用定理1.2.5和定理1.2.6，即知

$$m^*(t)\leqslant r_k(t),\ t\in I, \tag{3.3.17}$$

其中$r_k(t)$是普通初值问题

$$u'=Lu+\eta_k,\ u(t_0)=\eta_k$$

的最大解，它满足

$$r_k(t)\to 0,\ u.c.于I. \tag{3.3.18}$$

由（3.3.12），（3.3.17）和（3.3.18）三式，即得，$m(t)\equiv 0$，$t\in I$.于是，根据定理1.1.3知$\{x_n(t)\}$是空间$C[I,\ E]$中的相对紧集，从而存在子列$\{x_{n_i}(t)\}$，它在I上一致收敛于某$x\in C[I,\ F]$.由（3.3.3）式，我们有

$$\left\|x_{n_i}(t)-x_0-\int_{t_0}^t f(x_{n_i}(s))ds\right\|\leqslant 2\varepsilon_{n_i}(t-t_0),\ t\in I. \tag{3.3.19}$$

由于

$$\|f(x_{n_i}(s))-f(x(s))\|\leqslant 2M,\ \forall s\in I;$$

$$\|f(x_{n_i}(s))-f(x(s))\|\to 0\ \ (i\to\infty),\ \forall s\in I,$$

故根据Lebesgue有界收敛定理，得知

$$\left\|\int_{t_0}^{t} f(x_{n_i}(s))ds - \int_{t_0}^{t} f(x(s))ds\right\|$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{t} \|f(x_{n_i}(s)) - f(x(s))\| ds \to 0\ (i\to\infty). \quad (3.3.20)$$

于是，由（3.3.19）和（3.3.20）两式，即得

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s))ds,\quad t\in I,$$

由此可知$x\in C^1[I,\ F]$，且x是问题（3.3.2）在I上属于F的解。□

3.4 附　　注

例3.1 取自Deimling[1].定理3.1.2选自Lakshmikantham和Leela[1]，而定理3.1.3在Deimling[1]中给出.定理3.2.1和定理3.2.2分别选自Du与Lakshmikantham[1]和Lakshmikantham, Leela与Vatsala[2]. 无穷维的例3.2.1是由郭大钧作出的. 作为定理3.2.1的补充，孙经先[4]，孙经先和孙勇[1]研究了当$f(x)$是不连续的增函数时，初值问题（3.3.2）在某区间〔v_0，w_0〕中最大广义解与最小广义解的存在性；作为定理3.2.2的补充，郭大钧与Lakshmikanthan[1]研究了当f具有表达式

$$f(t,\ u) = f_0(t,\ u) + a_1(t)f_1(u) + a_2(t)f_2(u),$$

其中$f_1(u)$是增的、不连续的，$f_2(u)$是减的、不连续的时，初值问题(2.1)在〔v_0，w_0〕上最小最大广义拟解对的存在性. 定理3.3.1取自Deimling[2]，但证明方法做了若干改变. 和本

章有关的内容，还可参看Lakshmikantham，Leela和Vatsala〔1〕，Deimling和Lakshmikantham〔1〕，〔2〕，Hu Shouchuan（胡守川）〔1〕。

第四章　耗散型条件

本章在耗散型条件下研究Banach空间常微分方程初值问题的存在唯一性问题。

4.1　耗散型条件下解的存在唯一性

设E是Banach空间，a，b是两个实数。令$B(x_0, b)=\{x\in E \mid \|x-x_0\|\leqslant b\}$，$R_0=[t_0, t_0+a]\times B(x_0, b)$。

设$V:[t_0, t_0+a]\times B(x_0, b)\times B(x_0, b)\to R_+(R_+=[0, +\infty))$是一个连续函数，并满足

(i) 对任给$t\in[t_0, t_0+a]$，x，$y\in B(x_0, b)$，有

$$\begin{cases} V(t, x, x)\equiv 0 \\ V(t, x, y)>0, \quad x\neq y\text{时} \end{cases} \tag{4.1.1}$$

并且对$\{x_n\}\subset B(x_0, b\}$，$\{y_n\}\subset B(x_0, b)$，$\lim\limits_{n\to\infty}V(t, x_n, y_n)=0$蕴含着

$$\lim_{r\to\infty}\|x_n-y_n\|=0. \tag{4.1.2}$$

(ii) 对任给$t\in[t_0, t_0+a]$，x，y，x_1，$y_1\in B(x_0, b)$，有

$$|V(t,x,y)-V(t,x_1,y_1)|\leqslant L(\|x-x_1\|+\|y-y_1\|), \tag{4.1.3}$$

这里$L>0$是一个常数；

则称V是L-D型函数。

定义4.1.1 设$f\in C[R_0,\ E]$，并存在L-D型函数V，使得对一切$t\in[t_0,\ t_0+a]$，$x,\ y\in B(x_0,\ b)$，有

$$D_-V(t,\ x,\ y)\leqslant g(t,\ V(t,\ x,\ y)),\tag{4.1.4}$$

这里

$$D_-V(t,\ x,\ y)=\varliminf_{h\to 0^+}\frac{1}{h}[V(t,\ x,\ y)$$

$$-V(t-h,\ x-hf(t,\ x),\ y-hf(t,\ y))],$$

$g\in C[[t_0,\ t_0+a]\times R_+,\ R]$，$g(t,\ 0)\equiv 0$，并且初值问题(2.2.1)在$[t_0,\ t_0+a]$上的最大解为零解，则称$f$满足Ляпунов耗散型条件。

定理4.1.1 设$f\in C[R_0,\ E]$，$\|f(t,\ x)\|\leqslant M(\forall(t,\ x)\in R_0)$，并设$f$满足Ляпунов耗散型条件。则Cauchy问题

$$x'=f(t,\ x),\ x(t_0)=x_0\tag{4.1.5}$$

在$[t_0,\ t_0+\alpha]$上具有唯一解，这里$\alpha<\min\left\{a,\ \frac{b}{M}\right\}$。

证 取定ε，使$\alpha=\min\left\{a,\ \frac{b}{M+\varepsilon}\right\}$。根据定理3.1.1，存在$x_n\in C^1[[t_0,\ t_0+\alpha],\ B(x_0,\ b)]$，$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$，使得

$$\begin{cases}x_n'(t)=f(t,\ x_n(t))+y_n(t),\ x_n(t_0)=x_0\\ \|y_n(t)\|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{n},\ t\in[t_0,\ t_0+\alpha].\end{cases}\tag{4.1.6}$$

固定自然数m和n，令

$$m(t)=V(t,\ x_n(t),\ x_m(t)),\ t\in[t_0,\ t_0+\alpha].$$

显然$m(t_0)=0$。利用(4.1.3)式可知当$t\in[t_0,\ t_0+\alpha]$，$t-h$

$\in[t_0,\ t_0+\alpha]$时有

$$m(t)-m(t-h)\leqslant L[\|x_n(t)-x_n(t-h)-hf(t,x_n(t))\|$$
$$+\|x_m(t)-x_m(t-h)-hf(t,\ x_m(t))\|]$$
$$+[V(t,\ x_n(t),\ x_m(t))-V(t-h,\ x_n(t)$$
$$-hf(t,\ x_n(t)),\ x_m(t)-hf(t,\ x_m(t))].$$

于是由（4.1.6）和（4.1.4）两式可知

$$D_-m(t)\leqslant L\left(\frac{\varepsilon}{n}+\frac{\varepsilon}{m}\right)+g(t,\ m(t)),\ t\in[t_0,\ t_0+\alpha],\tag{4.1.7}$$

其中$D_-m(t)$是$m(t)$的Dini导数.根据定理1.2.6，

$$m(t)\leqslant r_{n,m}(t),\ t\in[t_0,\ t_0+\alpha],$$

其中$r_{n,m}(t)$是

$$u'=g(t,\ u)+L\left(\frac{\varepsilon}{n}+\frac{\varepsilon}{m}\right),\ u(t_0)=0$$

的最大解。再根据定理1.2.5，并注意到$u'=g(t,\ u)$，$u(t_0)=0$的最大解为零解，故可得

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}}V(t,\ x_n(t),\ x_m(t))=0.$$

因此，利用V的性质（见(4.1.2)式）可知$\{x_n(t)\}$是$[t_0,t_0+\alpha]$上按一致收敛意义下的柯西序列，从而$\{x_n(t)\}$在$[t_0,t_0+\alpha]$上一致收敛于$[t_0,\ t_0+\alpha]$上的某连续函数$x(t)$，并且$x(t)$是Cauchy问题（4.1.5）的解.

下证唯一性.设$y(t)$也是Cauchy问题（4.1.5）在$[t_0,\ t_0+\alpha]$上的解.令$m_1(t)=V(t,\ x(t),\ y(t))$，则仿（4.1.17）式之证明知$D_-m_1(t)\leqslant g(t,\ m_1(t))$.利用定理1.2.6，并注意到初值问题$u'=g(t,\ u)$，$u(t_0)=0$的最大解为零解，可得

$m_1(t)\equiv 0$，此即$x(t)\equiv y(t)$。□

系4.1.1 设$f\in C[R_0, E]$，$\|f(t,x)\|\leqslant M(\forall(t,x)\in R_0)$，并且对$t\in[t_0, t_0+a]$，$x$，$y\in B(x_0, b)$有

$$[x-y, f(t, x)-f(t, y)]_-\leqslant g(t, \|x-y\|) \tag{4.1.8}$$

其中$g\in C[[t_0, t_0+a]\times R_+, R]$，$g(t, 0)\equiv 0$，并且初值问题（2.2.1）在$[t_0, t_0+a]$上的最大解为零解.则定理 4.1.1的结论成立.

证 在定理4.1.1中令$V(t, x, y)=\|x-y\|$即可.□

L-D型函数是很多的.例如，当$1\leqslant p<+\infty$时

$$V(t, x, y)=\|x-y\|^p$$

就是L-D型函数.利用这一函数可以得到定理4.1.1的某些特殊形式，本书不再详述.

定义4.1.2 设$g(t, u):(t_0, t_0+a]\times R_+\to R$是一个函数.如果对任意给定的$\varepsilon>0$，都存在$\delta>0$，$\delta_i>0$，$(i=1,2,\cdots$，下同$)$ $t_i\in(t_0, t_0+a)$，$t_i\to t_0$以及$u_i\in C[[t_i, t_0+a], R_+]$，使得

$$\begin{cases} u_i(t_i)\geqslant\delta(t_i-t_0), \ D^-u_i(t)\geqslant g(t, u_i(t))+\delta_i, \\ 0<u_i(t)\leqslant\varepsilon, \ \forall t\in(t_i, t_0+a], \end{cases} \tag{4.1.9}$$

则称g是U_1类函数.

定理4.1.2 设$f\in C[R_0, E]$，$\|f(t, x)\|\leqslant M(\forall(t, x)\in R_0)$，并且存在$U_1$类函数$g$，使得

$$(x-y, f(t, x)-f(t, y))_-\leqslant g(t,\|x-y\|)\,\|x-y\|,$$
$$\forall t\in(t_0, t_0+a], \ x, \ y\in B(x_0, b). \tag{4.1.10}$$

令 $\alpha<\min\left\{a,\dfrac{b}{M}\right\}$. 则Cauchy问题（4.1.5）在$[t_0,t_0+\alpha]$上具有唯一解.

证 根据定理3.1.1，存在$x_n\in C^1[[t_0,t_0+\alpha],B(x_0,b)]$，$(n=1,2,3,\cdots)$，使得

$$\begin{cases}x_n'(t)=f(t,\ x_n(t))+y_n(t),\ x_n(t_0)=x_0\\ \|y_n(t)\|\leqslant\dfrac{1}{n},\ t\in[t_0,\ t_0+\alpha].\end{cases}$$

下证$\{x_n(t)\}$是基本列. 任给$\varepsilon>0$，由g是U_1类函数知存在$\delta>0$，$\delta_1>0$，$t_1\in(t_0,\ t_0+a)$及$u_1(t)$，具有定义4.1.2所述的性质. 取$\eta>0$及自然数n_0，使当m，$n\geqslant n_0$时

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}+\eta<\delta. \tag{4.1.11}$$

令$z(t)=z_{m,n}(t)=x_n(t)-x_m(t)$，$m(t)=\|z(t)\|$. 则由定理1.3.2性质(X)并利用（4.1.10）式，有

$$\begin{aligned}m(t)m'_-(t)&\leqslant(z(t),\ z'(t))_-\\ &\leqslant g(t,\ \|x_n(t)-x_m(t)\|)\|x_n(t)-x_m(t)\|\\ &\quad+\|y_n(t)-y_m(t)\|\|x_n(t)-x_m(t)\|\\ &\leqslant g(t,\ m(t))m(t)+\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)m(t).\end{aligned} \tag{4.1.12}$$

由$\|x_n'(t)\|=\|f(t,\ x_n(t))+y_n(t)\|\leqslant M+1$ 知 $\|x_n(t)-x_0\|\leqslant(M+1)|t-t_0|$. 由$f$的连续性知存在$r>0$，使得只要$\|x-x_0\|\leqslant r$，就有$\|f(t,\ x)-f(t,\ x_0)\|\leqslant\dfrac{\eta}{2}$. 取$t_\eta\in(t_0,\ t_0+\alpha)$，使当$t\in[t_0,\ t_\eta]$时，有 $\|x_n(t)-x_0\|\leqslant(M+1)|t-t_0|\leqslant r$，从而$\|x_n'(t)-x_m'(t)\|\leqslant\|f(t,\ x_n(t))-f(t,\ x_0)\|+\|f(t,\ x_m(t))-$

$f(t, x_0)\| + \|y_n(t) - y_m(t)\| \leqslant \eta + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)$，故有

$$m(t) \leqslant \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \eta\right)(t - t_0),\quad t \in [t_0, t_\eta]. \quad (4.1.13)$$

取i，使$t_i < t_\eta$。再取$n_1 \geqslant n_0$，使$n, m \geqslant n_1$时$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \delta_i$。故

$$m(t_i) \leqslant \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \eta\right)(t_i - t_0)$$

$$< \delta(t_i - t_0) \leqslant u_i(t_i).$$

设在$[t_i, t_0 + \alpha]$上$m(t) < u_i(t)$不处处成立，令

$$t^* = \sup\{\bar{t} \mid 对t \in [t_i, \bar{t}],\ m(t) < u_i(t)\},$$

则$m(t^*) = u_i(t^*) > 0$，$t_i < t^* \leqslant t_0 + \alpha$。由（4.1.12）式知

$$m'_-(t^*) \leqslant g(t^*, m(t^*)) + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)$$

$$\leqslant g(t^*, m(t^*)) + \delta_i < D^- u_i(t^*).$$

另一方面，在$[t_i, t^*)$上$m(t) < u_i(t)$，故

$$m'_-(t^*) = \lim_{h \to 0^+} \frac{m(t^*) - m(t^* - h)}{h}$$

$$\geqslant \overline{\lim_{h \to 0^+}} \frac{u_i(t^*) - u_i(t^* - h)}{h} = D^- u_i(t^*)$$

产生矛盾。故在$[t_i, t_0 + \alpha]$上$m(t) < u_i(t) \leqslant \varepsilon$。令$t_i \to 0$，得在$(t_0, t_0 + \alpha]$上$m(t) \leqslant \varepsilon$。由$m(t)$的连续性知在$[t_0, t_0 + \alpha]$上$m(t) \leqslant \varepsilon$，从而$\{x_n(t)\}$关于$t \in [t_0, t_0 + \alpha]$在一致收敛意义下是基本列。故存在$[t, t_0 + \alpha]$上的连续函数$x(t)$，使$x_n(t)$关于$t \in [t_0, t_0 + \alpha]$一致收敛于$x(t)$，并且$x(t)$是Cauchy问题(4.1.5)的解。

再证唯一性．设$x(t)$和$y(t)$是Cauchy问题（4.1.5）的两个不同的解．令$n(t)=\|x(t)-y(t)\|$，则

$$n(t)n'_-(t)=(x(t)-y(t),\ f(t,\ x(t))-f(t,\ y(t))_-$$
$$\leqslant g(t,\ n(t))n(t).$$

给定$\varepsilon>0$．仿（4.1.13）式的证明方法，可知存在$t_\delta\in(t_0,t_0+a)$，使

$$n(t)\leqslant\frac{\delta}{2}(t-t_0),\quad t\in[t_0,\ t_\delta]$$

取i，使$t_i<t_\delta$，则有$n(t_i)\leqslant\frac{\delta}{2}(t_i-t_0)<u_i(t_i)$．仿上一段关于$m(t)\leqslant\varepsilon(t\in[t_0,\ t_0+a])$的证明方法可知$n(t)\leqslant\varepsilon(t\in[t_0,\ t_0+a]$．令$\varepsilon\to0$即知$n(t)\equiv0$，即$x(t)\equiv y(t)$．□

应用中经常使用的许多$g(t,\ u)$都是U_1类函数．例如

$$g(t,\ u)=Lu,$$

$$g(t,\ u)=\frac{u}{t-t_0}$$

等等就都是U_1类函数．

4.2 全局存在唯一性定理

定理4.2.1 设$f\in C[R_+\times E,\ E]$，并且对任给$T>0$，和$L>0$，都存在$M=M(T,\ L)>0$，使得

$$\|f(t,\ x)\|\leqslant M,\quad \forall t\in[0,\ T],\ \|x\|\leqslant L. \tag{4.2.1}$$

又设存在$\lambda\in C[R_+,\ R]$，使得对一切$x,\ y\in E$，$t\geqslant0$，有

$$[x-y,f(t,\ x)-f(t,\ y)]_-\leqslant\lambda(t)\|x-y\|. \tag{4.2.2}$$

则对任给$t_0\geqslant0$，$x_0\in E$，初值问题

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{4.2.3}$$

定义在$[t_0, +\infty)$上的解存在并且唯一.

证 给定$t_0 \geqslant 0$，$x_0 \in E$.由系4.1.1可知必存在$\alpha > 0$，使初值问题（4.2.3）存在定义在$[t_0, t_0+\alpha]$上的唯一解.令$V = \{x(t) | x(t)$定义在$[t_0, \beta_x)$上，且在$[t_0, \beta_x)$上是初值问题（4.2.3）的解$\}$.则$V \neq \phi$.令$T = \sup\{\beta_x | x(t) \in V\}$.显然初值问题（4.2.3）有定义在$[t_0, T]$上的唯一解，记为$x(t, t_0, x_0)$.若$T = +\infty$，则定理成立.下设$T < +\infty$.令

$$m(t) = \|x(t, t_0, x_0) - x_0\|, \quad t_0 \leqslant t < T.$$

则对$t \in [t_0, T)$，

$$\begin{aligned} m'_-(t) &= [x(t, t_0, x_0) - x_0, f(t, x(t, t_0, x_0))]_- \\ &\leqslant [x(t, t_0, x_0) - x_0, f(t, x(t, t_0, x_0)) - f(t, x_0)]_- \\ &\quad + [x(t, t_0, x_0), f(t, x_0)]_+ \\ &\leqslant \lambda(t) m(t) + \|f(t, x_0)\|. \end{aligned}$$

因此，必存在$L > 0$，使$\|x(t, t_0, x_0)\| \leqslant L (t \in [t_0, T))$.根据（4.2.1）式，存在$M > 0$，使得对$t$，$s \in [t_0, T)$，有

$$\|x(t, t_0, x_0) - x(s, t_0, x_0\| \leqslant M |t - s|.$$

所以$\lim\limits_{t \to T^-} x(t, t_0, x_0)$存在.令$x_1 = \lim\limits_{t \to T^-} x(t, t_0, x_0)$，并考察初值问题

$$x' = f(t, x), \quad x(T) = x_1$$

根据系4.1.1，它的解在某一区间$[T, T+\delta]$上存在唯一，设该解为$x_1(t)$.令

$$x^*(t) = \begin{cases} x(t, t_0, x_0), & t_0 \leqslant t < T, \\ x_1(t), & T \leqslant t < T + \delta. \end{cases}$$

则显然$x^*(t)$是初值问题（4.2.3）在$[t_0, T+\delta)$上的解，此与

T的定义矛盾。□

定理4.2.2 设$f\in C[R_+\times E,\ E]$，并且对任给$T>0$，$L>0$，$\varepsilon>0$，存在$\delta=\delta(T,\ \varepsilon,\ L)>0$，使得对任给$(t,x)$，$(s,\ x)\in[0,\ T]\times E$，$|t-s|\leqslant\delta$，$\|x\|\leqslant L$，都有

$$\|f(t,\ x)-f(s,\ x)\|\leqslant\varepsilon. \tag{4.2.4}$$

又设存在$\lambda\in C[R_+,\ R]$，使得对一切x，$y\in E$，$t\geqslant 0$，(4.2.2)式成立。则对任给$t_0\geqslant 0$，$x_0\in E$，初值问题（4.2.3）都存在定义在$[t_0,\ +\infty)$上的唯一解。

证 设$T,x(t,\ t_0,\ x_0)$同定理4.2.1证明所述。若$T<+\infty$则由定理4.2.1之证明可知必存在$L>0$，使$\|x(t,\ t_0,\ x_0)\|\leqslant L$，$\forall t\in[t_0,\ T)$。任给$\varepsilon>0$，设$\delta$如定理条件所述。取$h<\delta$，令

$$n(t)=\|x(t+h,\ t_0,\ x_0)-x(t,t_0,x_0)\|,t\in[t_0,T-h)$$

则有

$$\begin{aligned}n'_-(t)=&[x(t+h,t_0,x_0)-x(t,t_0,x_0),f(t+h,x(t+h,t_0,\\&\quad x_0))-f(t,\ x(t,\ t_0,\ x_0))]_-\\&\leqslant[x(t+h,t_0,x_0)-x(t,t_0,x_0),f(t,x(t+h,t_0,\ x_0))\\&\quad -f(t,x(t,t_0,x_0))]_-+[x(t+h,t_0,x_0,-x(t,\ t_0,\\&\quad x_0),f(t+h,x(t+h,t_0,x_0))-f(t,\ x(t+h,\ t_0,\\&\quad x_0))]_+\\&\leqslant\lambda(t)n(t)+\|f(t+h,x(t+h,t_0,x_0))-f(t,x(t+h,\\&\quad t_0,\ x_0))\|\\&\leqslant\lambda(t)n(t)+\varepsilon.\end{aligned}$$

积分这一不等式并利用定理1.2.5和定理1.2.6，即可知$\lim\limits_{t\to T^-}x(t,\ t_0,\ x_0)$存在。再仿定理4.2.1的证明即知定理4.2.2的结论成立。□

系4.2.1 设$f(x)\in C[E,\ E]$，并存在常数$M>0$，使得

对一切x，$y\in E$，有

$$[x-y,\ f(x)-f(y)]_-\leqslant M\|x-y\|. \tag{4.2.5}$$

则对任给$t_0\geqslant 0$，$x_0\in E$，初值问题

$$x'=f(x),\ x(t_0)=x_0 \tag{4.2.6}$$

定义在$[t_0,\ +\infty)$上的解存在并且唯一。

证 在定理4.2.2中，令$\lambda(t)\equiv M$，并注意到（4.2.4）式必自动满足。□

用与定理4.2.2类似的证明方法，可以把系4.2.1推广为

定理4.2.3 设$f\in C[E,\ E]$，并且

$$[x-y,f(x)-f(y)]_-\leqslant g(\|x-y\|),\forall x,y\in E, \tag{4.2.7}$$

其中$g\in C[R_+,\ R]$，$g(0)=0$，并且初值问题$u'=g(u)$，$u(0)=0$在R_+上的最大解为零解，则对任给$t_0\geqslant 0$，$x_0\in E$，初值问题（4.2.6）定义在$[t_0,\ +\infty)$上的解存在且唯一。

4.3 Galerkin逼近

设E是Banach空间.本节中我们总假定:存在E的有限维空间序列$\{E_n\}$和线性投影算子序列$\{P_n\}(P_n:E\to E_n)$，满足（i）$\|P_n\|=1(n=1,\ 2,\ \cdots)$;(ii)对任给$x\in E$，$P_nx\to x$.

满足上述假设的最简单的例子是可分的Hilbert空间.

引理4.3.1 在上述假设下，

$$(y,\ P_nx)_-\leqslant(y,\ x)_+,\ \forall x\in E,\ y\in E_n \tag{4.3.1}$$

证 根据定理1.3.1，存在$f\in Jy$，使$(y,\ P_nx)_-=f(P_nx)=P_n^*f(x)$.因为$\|P_n\|=1$，故$\|P_n^*\|=1$，所以

$$\|P_n^*f\|\leqslant\|f\|=\|y\|,\ P_n^*f(y)=f(y)=\|y\|^2,$$

即$P_n^* Jy \subset Jy$.这表明（4.3.1）式成立.□

在考察E上的常微分方程初值问题

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{4.3.2}$$

的同时，考察

$$x' = P_n f(t, x), \quad x(t_0) = P_n x_0, \quad x \in E_n \tag{4.3.3}$$

（4.3.3）称为是（4.3.2）的Galerkin逼近.

定理4.3.1 设$f \in C[R_0, E]$，$\|f(t, x)\| \leqslant M$（$\forall (t, x) \in R_0$）。设对任给$t \in [t_0, t_0 + a]$，x，$y \in B[x_0, b]$，都有

$$(x - y, f(t,x) - f(t,y))_+ \leqslant g(t, \|x - y\|)\|x - y\|, \tag{4.3.4}$$

这里$g \in C[[t_0, t_0 + a] \times R_+, R]$，$g(t, 0) \equiv 0$，并且$u(t) \equiv 0$是初值问题$u' = g(t, u)$，$u(t_0) = 0$的最大解. 令$\alpha < \min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}$，则存在自然数$n_0$，使得当$n \geqslant n_0$时，方程（4.3.3）在$[t_0, t_0 + \alpha]$上具有唯一解$x_n(t)$，并且$x_n(t)$在$[t_0, t_0 + \alpha]$上一致收敛于方程（4.3.2）在$[t_0, t_0 + \alpha]$上的唯一解.

证 取n_0，使当$n \geqslant n_0$时$\|P_n x_0 - x_0\| + \alpha M \leqslant b$. 下设$n \geqslant n_0$. 由引理4.3.1知对$t \in [t_0, t_0 + \alpha]$，$x$，$y \in E_n \cap B[x_0, b]$，有

$$\begin{aligned}(x - y, P_n f(t, x) - P_n f(t, y))_- &\leqslant (x - y, f(t,x) \\ &\quad - f(t, y))_+ \\ &\leqslant g(t, \|x - y\|)\|x - y\|,\end{aligned}$$

所以根据系4.1.1（并注意到定理1.3.1），方程（4.3.3）在$[t_0, t_0 + \alpha]$上具有唯一解$x_n(t)$. 令$y_n(t) = P_n x(t)$（这里$x(t)$是方程（4.3.2）在$[t_0, t_0 + \alpha]$上的唯一解，根据系4.1.1，它唯一存在），$z_n(t) = x_n(t) - y_n(t)$，$m(t) = \|z_n(t)\|$. 于是，

$$m(t) m'_-(t) \leqslant (z_n(t), z_n'(t))_-$$

$$\leqslant (z_n(t),\ P_nf(t,\ x_n(t))-P_nf(t,\ y_n(t))_-$$
$$+\|f(t,\ y_n(t))-f(t,\ x(t))\|m(t)$$
$$\leqslant g(t,m(t))m(t)+\|f(t,y_n(t))$$
$$-f(t,\ x(t))\|m(t).$$

注意到$\|f(t,\ P_nx(t))-f(t,x(t))\|$当$n\to\infty$关于$t\in[t_0,\ t_0+\alpha]$一致收敛于0，所以存在$N\geqslant n_0$，使当$n\geqslant N$时

$$m(t)m'_-(t)\leqslant [g(t,\ m(t))+\varepsilon]m(t)$$

仿定理4.1.1之证明即可知$\|z_n(t)\|$在$[t_0,\ t_0+\alpha]$上一致收敛于0，从而$x_n(t)$在$[t_0,\ t_0+\alpha]$上一致收敛于$x(t)$.□

同样，我们可以证明

定理4.3.2 设$f\in C[E,\ E]$，并且

$$[x-y,\ f(x)-f(y)]_+\leqslant g(\|x-y\|),\ \forall(x,\ y\in E],\tag{4.3.5}$$

其中$g\in C[R_+,\ R]$，$g(0)=0$，并且初值问题$u'=g(u),u(0)=0$的最大解为零解。则存在自然数n_0，使当$n\geqslant n_0$时，初值问题

$$x'=P_nf(x),\ x(t_0)=P_nx_0,\ x\in E_n\tag{4.3.6}$$

$(t_0\geqslant 0)$在$[t_0,\ +\infty)$上具有唯一解$x_n(t)$，并且$x_n(t)$在$[t_0,\ +\infty)$的任一有界集上都一致收敛于初值问题

$$x'=f(x),\ x(t_0)=x_0\tag{4.3.7}$$

在$[t_0,\ +\infty)$上的唯一解$x(t)$。

4.4 连续相依性定理和可微性定理

先给出耗散型条件下的连续相依性定理。

定理4.4.1 设$f\in C[R_+\times E,\ E]$，并且对任给$t\in R_+$，x，

$y\in E$，有

$$[x-y,\ f(t,x)-f(t,y)]_{-}\leqslant g(t,\ \|x-y\|),\tag{4.4.1}$$

其中$g(t,\ u)\in C[R_{+}\times R_{+},\ R]$，$g(t,\ 0)=0$，并且$u(t)\equiv 0$是初值问题$u'=g(t,\ u)$，$u(0)=0$的最大解.设

$$u'=g(t,\ u),\ u(t_0)=u_0\geqslant 0$$

的最大解$r(t,\ t_0,\ u_0)$连续依赖于$(t_0,\ u_0)\in R_{+}\times R_{+}$.则初值问题

$$x'=f(t,\ x),\ x(t_0)=x_0\tag{4.4.2}$$

的解$x(t,\ t_0,\ x_0)$连续依赖于$(t_0,\ x_0)\in R_{+}\times E$.

证 根据系4.1.1，初值问题（4.4.2）的解对任给$(t_0,\ x_0)\in R_{+}\times E$都是局部存在唯一的，从而在其最大存在区间上是唯一的。设$x(t,\ t_1,\ x_1)$和$x(t,\ t_2,\ x_2)$分别是$x'=f(t,x)$在初值条件$x(t_1)=x_1$和$x(t_2)=x_2$下的解。不失一般，设$t_1\leqslant t_2$。令$m(t)=\|x(t,\ t_1,\ x_1)-x(t,\ t_2,\ x_2)\|\ (t\geqslant t_1)$，则由（4.4.1）式可知

$$m'_{-}(t)\leqslant g(t,\ m(t)),\ t\geqslant t_1.$$

因为$m(t_1)=\|x_1-x(t_1,\ t_2,\ x_2)\|$，故由定理1.2.5可知

$$m(t)\leqslant r(t,\ t_1,\ \|x_1-x(t_1,\ t_2,\ x_2)\|),\ t\geqslant t_1.$$

因为$r(t,\ t_0,\ u_0)$连续依赖于$(t_0,\ u_0)$，所以

$$\lim_{\substack{t_1\to t_2\\ x_1\to x_2}} m(t)\leqslant \lim_{\substack{t_1\to t_2\\ x_1\to x_2}} r(t,\ t_1,\ \|x_1-x(t_1,\ t_2,\ x_2)\|)$$

$$=r(t,\ t_2,\ 0)\equiv 0.$$

命题获证。□

下面研究解对初值的可微性问题.我们将假定f满足假设

（H）$f\in C[R_{+}\times E,\ E]$，$f(t,\ x)$关于$x$的Frechet 偏导

数$f'_x(t, x)$存在，连续，并且

$$[y, f'_x(t, z)y]_+ \leqslant g(t, \|y\|), \quad \forall t \geqslant 0, \ y, z \in E, \tag{4.4.3}$$

这里$g \in C[R_+ \times R_+, R]$，$g(t, 0) \equiv 0$，并且$u(t) \equiv 0$是$u' = g(t, u)$，$u(0) = 0$的最大解。

引理4.4.1 设假设（H）满足，则对一切$t \geqslant 0$，$x \in E$，$y \in E$，有

$$[x-y, f(t, x)-f(t, y)]_+ \leqslant g(t, \|x-y\|). \tag{4.4.4}$$

证 任取$[0, 1]$的一个分割$0 = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_n = 1$，令$\Delta s_i = s_{i+1} - s_i$，$\tau_i \in [s_i, s_{i+1}]$（$i = 0, 1, \cdots, n-1$）。由Riemann积分的定义，有

$$\int_0^1 f'_x(t, sx_1 + (1-s)x_2)h\,ds$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=0}^{n-1} f'_x(t, \tau_i x_1 + (1-\tau_i)x_2)h\Delta s_i\right].$$

于是

$$\left[h, \int_0^1 f'_x(t, sx_1 + (1-s)x_2)\,h\,ds\right]_+$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[h, \sum_{i=0}^{n-1} f'_x(t, \tau_i x_1 + (1-\tau_i)x_2)h\Delta s_i\right]_+$$
$$\leqslant \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\Delta s_i[h, f'_x(t, \tau_i x_1 + (1-\tau_i)x_2)h]_+$$
$$\leqslant g(t, \|h\|)\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\Delta s_i = g(t, \|h\|).$$

在上面的不等式中，令$x_1 = x, x_2 = y, h = x - y$，即可知(4.4.4)式成立。□

由引理4.4.1及系4.1.1可知，如果假设（H）满足，则初值问题(4.4.2)的解对任给$(t_0, x_0)\in R_+\times E$ 都是局部存在唯一的，从而在其最大存在区间上是唯一的.

对任给$(t_0, x_0)\in R_+\times E$，我们用$x(t, t_0, x_0)$ 表示初值问题（4.4.2）的解，下面我们关心的问题是 $x(t, t_0, x_0)$ 关于x_0和关于t_0是否可微的问题.

定理4.4.2 设假设（H）满足.则下列结论成立:

(i) $x(t, t_0, x_0)$关于x_0的Frechet偏导数$\frac{\partial}{\partial x_0}x(t, t_0, x_0)$ 存在（记为$\frac{\partial}{\partial x_0}x(t, t_0, x_0)\equiv U(t, t_0, x_0)$)，并满足

$$\begin{cases}U_t'=f_x'(t, x(t, t_0, x_0))U, & t\geqslant t_0,\\ U(t_0)=I;\end{cases}\tag{4.4.5}$$

(ii) $x(t, t_0, x_0)$关于t_0的Frechet偏导数$\frac{\partial}{\partial t_0}x(t, t_0, x_0)$ 存在（记$\frac{\partial}{\partial t_0}x(t, t_0, x_0)\equiv W(t, t_0, x_0)$)，并满足

$$\begin{cases}W_t'=f_x'(t, x(t, t_0, x_0))W, & t\geqslant t_0,\\ W(t_0)=-f(t_0, x_0);\end{cases}\tag{4.4.6}$$

(iii) $W(t,t_0,x_0)=-V(t,t_0,x_0)f(t_0,x_0)$.

证 显然，方程（4.4.5）的解唯一存在，我们用$U(t)$表示这一解.令

$$z(t)=x(t, t_0, x_0+h)-x(t, t_0, x_0)-U(t)h,$$

其中$t\geqslant t_0$，x_0，$x_0+h\in E$.令$m(t)=\|z(t)\|$，则

$$\begin{aligned}m_t'(t)&\leqslant[z(t), z'(t)]_+\\ &=[z(t), f(t, x(t, t_0, x_0+h))\end{aligned}$$

$$-f(t,\ x(t,\ t_0,\ x_0))-f_x'(t,x(t,t_0,$$
$$x_0))U(t)h]_+.$$

由f关于x的可微性，有

$$f(t,x(t,t_0,x_0+h))-f(t,x(t,t_0,x_0))$$
$$=f_x'(t,x(t,t_0,x_0))[x(t,t_0,x+h)-x(t,t_0,x_0)]$$
$$+w(h),$$

其中$w(h)=o(\|x(t,t_0,x_0+h)-x(t,t_0,x_0)\|)$。因此，由$(H)$可知

$$m_+'(t)\leqslant[z(t),f_x'(t,x(t,t_0,x_0))z(t)+w(h)]_+$$
$$\leqslant[z(t),f_x'(t,x(t,t_0,x_0))z(t)]_++[z(t),w(h)]_+$$
$$\leqslant\|h\|[z(t),\ f_x'(t,\ x(t,t_0,\ x_0))\frac{z(t)}{\|h\|}]_++[z(t),w(h)]_+$$

$$\leqslant\|h\|g\left(t,\ \frac{m(t)}{\|h\|}\right)+[z(t),\ w(h)]_+. \tag{4.4.7}$$

下证

$$\lim_{\|h\|\to0}\left[z(t),\ \frac{w(h)}{\|h\|}\right]_+=0. \tag{4.4.8}$$

事实上，若令$n(t)=\|x(t,t_0,x_0+h)-x(t,t_0,x_0)\|$，则

$$n_+'(t)\leqslant[x(t,t_0,x_0+h)-x(t,t_0,x_0),x'(t,t_0,x_0+h)$$
$$-x'(t,t_0,x_0)]_+$$
$$\leqslant\|x'(t,\ t_0,\ x_0+h)-x'(t,\ t_0,\ x_0)\|$$
$$\leqslant\|f(t,x(t,t_0,x_0+h))-f(t,x(t,t_0,x_0)\|$$
$$\leqslant k_1\|x(t,t_0,t_0+h)-x(t,t_0,x_0)\|=k_1n(t), \tag{4.4.9}$$

其中

$$k_1=\sup\{\|f_x'(t,\ z)\|\,\Big|\,t\in I,z\in\{sx(t,t_0,x_0)$$

$$+(1-s)x(t,t_0,x_0+h)\mid 0\leqslant s\leqslant 1\}\},$$

I表示R_+中含有t_0的一个有界区间，注意到$n(t_0)=\|h\|$，故由微分不等式（4.4.9）可得

$$n(t)\leqslant\|h\|e^{k_1(t-t_0)}\leqslant k_2\|h\|,\quad \forall t\in I.$$

其中$k_2=\sup\{e^{k_1(t-t_0)}\mid t\in I\}$为一常数.因此，

$$\lim_{\|h\|\to 0}\left[z(t),\ \frac{w(h)}{\|h\|}\right]_+\leqslant\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|w(h)\|}{\|h\|}$$

$$\leqslant\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|w(h)\|}{k_2 n(t)}=0,$$

即（4.4.8）式成立.所以，由（4.4.7）式及定理1.2.5和定理1.2.6可知

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{m(t)}{\|h\|}=r(t,\ t_0,\ 0)\equiv 0$$

其中$r(t,\ t_0,\ 0)$是$u'=g(t,\ u)$，$u(t_0)=0$的最大解，从而（i）获证.定义

$$y(t)=x(t,t_0+\tau,x_0)-x(t,t_0,x_0)+U(t)f(t_0,x_0)\tau,$$

令$p(t)=\|y(t)\|$，则

$$\begin{aligned}p'_+(t)&\leqslant[y(t),\ y'(t)]_+\\&=[y(t),f(t,x(t,t_0+\tau,x_0))-f(t,x(t,t_0,x_0))\\&\quad+f'_x(t,x(t,t_0,x_0))U(t)f(t_0,x_0)\tau]_+\\&=[y(t),f'_x(t,x(t,t_0,x_0))y(t)+w(\tau)]_+\\&\leqslant[y(t),f'_x(t,x(t,t_0,x_0))y(t)]_++[y(t),w(\tau)]_+\\&\leqslant\tau g\left(t,\ \frac{p(t)}{\tau}\right)+[y(t),\ w(\tau)]_+\end{aligned}\qquad(4.4.10)$$

其中$w(\tau)=o(\|x(t,t_0+\tau,x_0)-x(t,t_0,\ x_0)\|)$．仿（4.4.8）式可以证明

$$\lim_{\tau\to 0}\left[y(t),\ \frac{w(\tau)}{\tau}\right]_+ = 0\ . \tag{4.4.11}$$

此外，

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{p(t_0)}{\tau}=\lim_{\tau\to 0}\left\|\frac{x(t_0,t_0+\tau,x_0)-x_0}{\tau}+f(t_0,\ x_0)\right\|$$

$$=\lim_{\tau\to 0}\left\|\frac{x(t_0,t_0+\tau,x_0)-x(t_0+\tau,t_0+\tau,x_0)}{\tau}\right.$$

$$\left.+f(t_0,\ x_0)\right\|$$

$$=0 \tag{4.4.12}$$

由（4.4.10），（4.4.11），（4.4.12）三式并利用定理1.2.5和定理1.2.6，得

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{p(t)}{\tau}=r(t,\ t_0,\ 0)\equiv 0\ .$$

从而

$$\frac{\partial}{\partial t_0}x(t,\ t_0,\ x_0)=-U(t)f(t_0,\ x_0)$$

（iii）获证，由（i）、（iii）即可知（ii）成立.□

定理4.4.3 在定理4.4.2的条件下，下列公式成立：

$$x(t,t_0,y_0)-x(t,t_0,\ x_0)=\int_0^1 U(t,x_0+s(y_0-x_0))(y_0-x_0)ds, \tag{4.4.13}$$

其中$U(t,t_0,x_0)=\frac{\partial}{\partial x_0}x(t,t_0,x_0)$.

证 由定理4.4.2可知

$$\frac{d}{ds}x(t,t_0,x_0+s(y_0-x_0))=U(t,t_0,x_0$$

$$+s(y_0-x_0))(y_0-x_0).$$

该式两端在[0，1]上对s积分即可.□

在考察初值问题

$$x'=f(t,\ x),\ x(t_0)=x \tag{4.4.14}$$

的同时，考察

$$y'=f(t,\ y)+R(t,\ y),\ y(t_0)=x_0, \tag{4.4.15}$$

其中$t_0\geqslant 0$，$x_0\in E$.设$R\in C[R_+\times E,\ E]$，用$x(t,\ t_0,\ x_0)$和$y(t,\ t_0,\ x_0)$分别表示初值问题(4.4.14)和初值问题(4.4.15)的解.

定理4.4.4 在定理4.4.2的条件下，对任给$t\geqslant t_0$，下列公式成立：

$$y(t,\ t_0,\ x_0)=x(t,\ t_0,\ x_0)$$
$$+\int_{t_0}^{t}U(t,s,y(s,t_0,x_0))R(s,y(s,t_0,x_0))ds, \tag{4.4.16}$$

其中$U(t,t_0,x_0)=\dfrac{\partial}{\partial x_0}x(t,\ t_0,\ x_0)$.

证 记$y(t)=y(t,\ t_0,\ x_0)$，则由定理4.4.2可知

$$\frac{d}{ds}x(t,\ s,\ y(s))=\frac{\partial}{\partial s}x(t,s,y(s))$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}x(t,\ s,\ y(s))y'(s)$$
$$=-U(t,s,y(s))f(s,y(s))+U(t,s,y(s))[f(s,\ y(s))$$
$$+R(s,\ y(s))]$$
$$=U(t,\ s,\ y(s))R(s,\ y(s)).$$

该式两端在$[t_0,\ t]$上对s积分，并注意到$x(t,\ t,\ y(t))=y(t)$

$=y(t, t_0, x_0)$, $x(t, t_0, y(t_0))=x(t, t_0, x_0)$, 即可知(4.4.16) 式成立.□

4.5 闭集上的解

设E是Banach空间, F是E中的凸闭集, $x_0\in F$, $B(x_0, b)=\{x\in E \mid \|x-x_0\|\leq b\}$, $F_0=F\cap B(x_0, b)$ $(b>0)$.

设$f\in C[[t_0, t_0+a]\times F, E]$, 并存在$L$-$D$型函数$V$, 使对一切$t\in[t_0, t_0+a]$, x, $y\in F_0$, 都有

$$D_-V(t, x, y)\leq g(t, V(t, x, y)), \qquad (4.5.1)$$

其中$D_-V(t, x, y)$的含义见定义4.1.1, $g\in C[[t_0, t_0+a]\times R_+, R]$, $g(t, 0)\equiv 0$, 并且$u'=g(t, u)$, $u(t_0)=0$在$[t_0, t_0+a]$ 上的最大解为零解, 则称f在$[t_0, t_0+a]\times F_0$上满足Ляпунов耗散型条件.

定理4.5.1 设$f\in C[[t_0,t_0+a]\times F, E]$, $\|f(t, x)\|\leq M$ $(\forall (t, x)\in[t_0, t_0+a]\times F_0)$, 并且$f$在$[t_0, t_0+a]\times F_0$上满足Ляпунов耗散型条件.又设

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}d(x+hf(t,x), F)=0, \forall t\in[t_0,t_0+a], x\in F. \qquad (4.5.2)$$

令$a=\min\left\{a, \dfrac{b}{M+1}\right\}$, 则初值问题

$$x'=f(t, x), \quad x(t_0)=x_0\in F \qquad (4.5.3)$$

在$[t_0, t_0+a]$上有唯一的属于F的解$x\in C^1[[t_0, t_0+a], F]$.

证 根据引理2.3.2, 我们可以得到一串近似解$x_n\in C[t_0, t_0+a], B(x_0, b)]$, 满足引理2.3.2中所述的全部性质, 由引

理2.3.2性质（iii）及F_0的凸性可知 $x_n(t)\in F_0(\forall t\in[t_0,\ t_0+\alpha])$.令

$$m(t)=V(t,\ x_n(t),\ x_m(t)),\ t\in[t_0,\ t_0+\alpha].$$

若$t\in(t_i^n,\ t_{i+1}^n)\cap(t_j^m,\ t_{j+1}^m)$，则由（4.1.3）式可知

$$m'_-(t)\leqslant\varliminf_{h\to0^+}\frac{1}{h}[V(t,x_n(t),x_m(t))-V(t-h,$$

$$x_n(t)-hf(t,x_n(t)),x_m(t)-hf(t,\ x_m(t)))]$$

$$+L[\|x_n'(t)-f(t,x_n(t))\|+\|x_m'(t)-f(t,x_m(t))\|].$$

（4.5.4）

由引理2.3.2性质（ii），有$\|x_n(t)-x_n(t_i^n)\|\leqslant(M+1)(t-t_i^n)$，从而再利用引理2.3.2性质（iv）、（v），可得

$$\|x_n'(t)-f(t,\ x_n(t))\|=\left\|\frac{x_n(t_{i+1}^n)-x_n(t_i^n)}{t_{i+1}^n-t_i^n}-f(t_i^n,\ x_n(t_i^n))\right\|$$

$$+\|f(t_i^n,x_n(t_i^n))-f(t,x_n(t))\|\leqslant2\varepsilon_n.$$

同理可得$\|x_m'(t)-f(t,x_m(t))\|\leqslant2\varepsilon_n$，从而由(4.5.1)和(4.5.4)两式可得

$$m'_-(t)\leqslant g(t,m(t))+2L(\varepsilon_n+\varepsilon_m)\qquad(4.5.5)$$

对$t\in(t_i^n,\ t_{i+1}^n)\cap(t_j^m,\ t_{j+1}^m)$成立.因此，除了至多可数了点外，（4.5.5）式对其它一切$t\in[t_0,\ t_0+\alpha]$成立.因为$m(t_0)=0$，从而根据1.2.6可知

$$m(t)\leqslant r_{n,m}(t,\ t_0,\ 0),\ t\in[t_0,\ t_0+\alpha],$$

其中$r_{n,m}(t,\ t_0,\ 0)$是初值问题

$$u'=g(t,\ u)+2L(\varepsilon_n+\varepsilon_m),\ u(t_0)=0$$

的最大解，由定理1.2.5可知$r_{n,m}(t,\ t_0,\ 0)$在$[t_0,\ t_0+\alpha]$上一致收敛于0（$m,\ n\to\infty$时）.所以

$$\lim_{m,n\to\infty}V(t,\ x_n(t),\ x_m(t))=0.$$

故由（4.1.2）式可知$\{x_n(t)\}$是$[t_0, t_0+a]$上在一致收敛意义下的柯西序列，从而存在$x(t):[t_0, t_0+a]\to E$，使得$x_n(t)$在$[t_0,t_0+a]$上一致收敛于$x(t)$.因为$x_n(t)\in F(\forall t\in[t_0,t_0+a])$，所以$x(t)\in F(\forall t\in[t_0, t_0+a])$.由定理2.3.1的证明可知$x(t)$是初值问题（4.5.3）的解.存在性部分证完. 唯一性部分证明与定理4.1.1相似. □

用类似的方法，我们还可以在凸闭集上建立与定理4.1.2平行的结论. 同样，定理4.2.1,定理4.2.2和定理4.2.3也可以推广到凸闭集. 例如，我们有

定理4.5.2 设$f\in C[F, E]$，并满足

$$\varliminf_{h\to 0^+}\frac{1}{h}d(x+hf(x), F)=0, \quad \forall x\in F,$$

$$[x-y, f(x)-f(y)]_-\leqslant g(\|x-y\|), \quad \forall x, y\in F,$$

其中$g\in C[R_+, R]$，$g(0)=0$，并且$u'=g(u)$，$u(0)=0$在R_+上的最大解为零解，则对任给$t_0\geqslant 0$，$x_0\in F$，初值问题（4.2.6）在$[t_0, +\infty)$上有唯一的属于F的解.

4.6 附　　注

定理4.1.1选自Lakshmikantham和Leeda[2].定理4.1.2是Deimling[3]中证明的.全局存在唯一性定理4.2.1～定理4.2.3分别见Martin[2]和Deimling[3]. 利用Galerkin逼近方法研究Banach空间常微分方程（本书4.3节的内容），可见Deimling[4].其进一步的讨论可见Deimling[1]. 耗散型条件下的连续相依性定理（定理4.4.1）和可微性定理（定理4.4.2～定理4.4.4）见Ladas，Ladde和Lakshmikantham

〔1〕.定理4.5.1选自Martin〔2〕. 与Banach 空间常微分方程初值问题在闭集上的解有关的更进一步的讨论见Martin〔1〕〔2〕及Lakshmikantham和Leela〔1〕.

第五章　流不变集与微分不等式

在普通常微分方程理论中，微分不等式是一个重要的工具。本章的主要目的是把这一工具推广到Banach空间常微分方程中去。

为此目的，本章首先进一步讨论了前面三章中已经使用过的"边界条件"，然后研究了Banach空间常微分方程中的流不变集的概念和判定问题。在此基础上，证明了关于微分不等式的若干结论。

本章中还讨论了Banach空间常微分方程的最大解的存在性问题和其它有关的问题。

5.1　关于边界条件的进一步讨论

在研究Banach空间微分方程在闭集上的解的性质时，边界条件

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}d(x+hf(t,x),F)=0$$

起着关键的作用（参见第二、三、四章）。本节就这一条件做某些进一步的讨论。

设E是Banach空间，$D\subset E$是凸闭集，∂D表示D的边界。当D没有内点时显然$\partial D=D$。

定理5.1.1　设D是E中的凸闭集，$x\in\partial D$，$z\in E$。则

$$\lim_{\lambda\to 0^+}\frac{1}{\lambda}d(x+\lambda z,\ D)=0 \tag{5.1.1}$$

的充分必要条件是：若$\varphi\in E^*$，$\varphi(x)=\sup\limits_{y\in D}\varphi(y)$，则必有 $\varphi(z)\leqslant 0$。

为证明这一定理，需要如下的引理：

引理5.1.1 设D是E中的凸集，$u\in E$，则

$$d(u,\ D)=\max\{\varphi(u)-\sup_{y\in D}\varphi^*(y)\mid\varphi\in E^*,\|\varphi\|=1\}.$$

这一引理的证明见Holmes[1]。

定理 5.1.1 的证明 先证必要性。设 $\varphi\in E^*$，$\varphi\neq\theta$，$\varphi(x)=\sup\limits_{y\in D}\varphi(y)$。令 $\psi=\frac{\varphi}{\|\varphi\|}$，则由引理5.1.1知

$$d(x+\lambda z,D)\geqslant\psi(x+\lambda z)-\sup_{y\in D}\psi(y)$$

$$=\psi(x)+\lambda\psi(z)-\psi(x)=\lambda\psi(z)$$

从而由（5.1.1)式可知

$$\psi(z)\leqslant\lim_{\lambda\to 0^+}\frac{1}{\lambda}d(x+\lambda z,\ D)=0.$$

此即$\varphi(z)\leqslant 0$。必要性获证。

再证充分性。用反证法，设对任给$\varphi\in E^*$，$\varphi(x)=\sup\limits_{y\in D}\varphi(y)$，都有$\varphi(z)\leqslant 0$，但（5.1.1）式不成立，则必存在 $\alpha>0$，使 $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\frac{1}{\lambda}d(x+\lambda z,\ D)=\alpha$。根据引理5.1.1，必存在 $\lambda_n\to 0^+$，$\|\varphi_n\|=1$，使得

$$\frac{1}{\lambda_n}[\varphi_n(x)-\sup_{y\in D}\varphi_n(y)]+\varphi_n(z)\geqslant\frac{\alpha}{2}. \tag{5.1.2}$$

注意到$\varphi_n(x)\leqslant\sup\limits_{y\in D}\varphi_n(y)$，所以（5.1.2）式表明$\varphi_n(z)\geqslant\frac{a}{2}$，并且

$$\lim_{n\to\infty}[\varphi_n(x)-\sup_{y\in D}\varphi_n(y)]=0.$$

令M_k是$\{\varphi_n|n\geqslant k\}$在$E^*$的弱*拓扑下的闭包。显然有$M_1\supset M_2\supset\cdots\supset M_k\supset\cdots$。因为$\|\varphi_n\|=1$，故$M_1$有界，从而根据著名的Alaoglu定理（见N.Dunford和J.T.Schwartz[1]），M_1是弱*紧的。于是$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}M_k\neq\phi$。取$\varphi_0\in\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}M_k$。任取$y_0\in D$。考虑$\varphi_0$在$E^*$中的弱*邻域

$$U(\varphi_0;k)=\varphi_0+\left\{\varphi\in E^*\,\middle|\,|\varphi(z)|<\frac{1}{k},|\varphi(x)|<\frac{1}{k},\ |\varphi(y_0)|<\frac{1}{k}\right\}.$$

因为对一切k，$\varphi_0\in M_k$，所以必存在$\{\varphi_{n_k}\}\subset\{\varphi_n\}$，使$\varphi_{n_k}\in U(\varphi_0;k)$。这样我们找出了$\{\varphi_n\}$的一个子列$\{\varphi_{n_k}\}$，使得

$$\varphi_{n_k}(z)\to\varphi_0(z),\varphi_{n_k}(x)\to\varphi_0(x),\varphi_{n_k}(y_0)\to\varphi_0(y_0).\quad(5.1.3)$$

从而

$$\begin{aligned}\varphi_0(y_0)&=\lim_{k\to\infty}\varphi_{n_k}(y_0)\leqslant\lim_{k\to\infty}\sup_{y\in D}\varphi_{n_k}(y)\\&=\lim_{k\to\infty}\varphi_{n_k}(x)=\varphi_0(x),\end{aligned}$$

这表明（注意上式对任给$y_0\in D$都成立）$\varphi_0(x)=\sup\limits_{y\in D}\varphi_0(y)$。因此，$\varphi_0(z)\leqslant0$。另一方面，由$\varphi_{n_k}(z)\to\varphi_0(z)$和$\varphi_{n_k}(z)\geqslant\frac{a}{2}$知$\varphi_0(z)\geqslant\frac{a}{2}>0$，产生矛盾。充分性获证。□

由定理5.1.1的证明可以知道，（5.1.1）式成立的充分必要条件是

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}d(x+\lambda z,\ D)=0.$$

设P是Banach空间E中的锥，则集合$P^*=\{\varphi\in E^*\mid\varphi(x)\geqslant 0,\ \forall x\in P\}$称为是$P$的共轭锥。

系5.1.1 设P是E中的锥，$x\in\partial P$，$z\in E$，则

$$\underline{\lim}_{\lambda\to 0^+}\frac{1}{\lambda}d(x+\lambda z,\ P)=0 \tag{5.1.4}$$

的充分必要条件是：对$\varphi\in P^*$，$\varphi(x)=0$蕴含着$\varphi(z)\geqslant 0$。

证 由定理5.1.1知（5.1.4）式成立的充要条件是$\varphi\in E^*$，$\varphi(x)=\inf\limits_{y\in P}\varphi(y)$蕴含着$\varphi(z)\geqslant 0$。由$P$是锥知$\varphi(x)=\inf\limits_{y\in P}\varphi(y)$等价于$\varphi(x)=0$且$\varphi^*\in P$.证完。□

定义5.1.1 设D是Banach空间E的子集，$x\in\partial D$。向量$u\in E$称为是D在x处的外法线向量，如果$\|u\|\neq 0$，并且$\{y\in E\mid\|y-(x+u)\|<\|u\|\}\cap D=\phi$。

在一般情况下，D在x处的外法线向量不一定存在。如果D在x处的外法线向量存在（它一般不是唯一的），则D在x处的所有外法线向量组成的集合记为$N(x)$。

定理5.1.2 设D是E的闭子集，$x\in\partial D$，$z\in E$，并且（5.1.1）式成立。则对任给$u\in N(x)$，有$(u,z)_-\leqslant 0$。

证 设$u\in N(x)$。下证对任给$\lambda>0$，都有

$$x+\lambda z\overline{\in}\{y\in E\mid\|y-(x+u)\|<\|u\|\}. \tag{5.1.5}$$

若不然，则存在$\lambda_0>0$，使

$$\|(x+\lambda_0 z)-(x+u)\|=\|\lambda_0 z-u\|<\|u\|.$$

令$g(\lambda)=\|\lambda z-u\|$，则$g(\lambda)$是凸函数，从而

$$g(\lambda)\leqslant\frac{\lambda}{\lambda_0}g(\lambda_0)+\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)\|u\|,\ 0<\lambda\leqslant\lambda_0.$$

注意到外法线向量的定义，有 $\|y-(x+u)\|\geqslant\|u\|(\forall y\in D)$，从而对任给$y\in D$，有

$$\|x+\lambda z-y\|\geqslant\|y-(x+u)\|-\|x+\lambda z-(x+u)\|$$

$$\geqslant\|u\|-g(\lambda)\geqslant\|u\|-\left[\frac{\lambda}{\lambda_0}g(\lambda_0)+\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)\|u\|\right]$$

$$=\frac{\lambda}{\lambda_0}\|u\|-\frac{\lambda}{\lambda_0}g(\lambda_0).$$

所以

$$\frac{1}{\lambda}d(x+\lambda z,\ D)\geqslant\frac{1}{\lambda_0}(\|u\|-g(\lambda_0)).$$

令$\lambda\to0$，得 $\varliminf\limits_{\lambda\to0^+}\frac{1}{\lambda}d(x+\lambda z,\ D)\geqslant\frac{1}{\lambda_0}(\|u\|-g(\lambda_0))>0$.产生矛盾．故（5.1.5）式成立．（5.1.5）式表明对一切$\lambda>0$，有$\|\lambda z-u\|\geqslant\|u\|$.

为了证明结论，我们只需证明存在$\varphi_0\in Ju$，使$\varphi_0(z)\leqslant0$即可．取一串λ_n，使$\lambda_n\to0^+$．取$\varphi_n\in J(u-\lambda_n z)$，并令$\psi_n=\dfrac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}$，则

$$\|u\|\leqslant\|u-\lambda_n z\|=\psi_n(u-\lambda_n z)=\psi_n(u)-\lambda_n\psi_n(z)$$
$$\leqslant\|u\|-\lambda_n\psi_n(z).$$

因此$\psi_n(z)\leqslant0$，并且$\psi_n(u)\to\|u\|$．仿（5.1.3）式之证明可知必存在$\{\psi_n\}$的子列$\{\psi_{n_k}\}$及$\psi_0\in E^*$，$\|\psi_n\|\leqslant1$，使

$$\psi_{n_k}(u)\to\psi_0(u),\quad \psi_{n_k}(z)\to\psi_0(z)$$

从而$\psi_0(u)=\|u\|$，$\|\psi_0\|=1$，$\psi_0(z)\leqslant0$．令$\varphi_0=\|u\|\psi_0$，则显然$\varphi_0\in Ju$，$\varphi_0(z)\leqslant0$.证完．□

例5.1.1 在定理5.1.2的条件下，推不出$(u,z)_+\leqslant0$.例

如，取$E=R^2$，其范数用$\|x\|=|x_1|+|x_2|$定义，这里$x=(x_1, x_2)\in R^2$。令$D=\{x|x_2\leqslant 0\}$，$x=(0,0)$，$z=(1,0)$。显然$\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\frac{1}{\lambda}d(x+\lambda z, D)=0$.另一方面，$u=0(0,1)\in N(x)$（$x=(0,0)$），而经过计算可知

$$(u, z)_+=1, \quad (u, z)_-=-1.$$

这表明由(5.1.1)式导不出$(u, z)_+\leqslant 0$。

5.2 流不变集

本节给出Banach空间常微分方程流不变集的概念，并讨论了它的判定问题。

定义5.2.1 设D是Banach空间E中的子集。如果对任给$y\in E$，都存在$x\in D$，使得$d(y, D)=\|x-y\|$，则称D是距离可达集。

显然，距离可达集一定是闭集。

设E是Banach空间，f: $[t_0, t_0+a)\times E\to E$（其中$a$可以取$+\infty$）。考虑Banach空间常微分方程初值问题

$$x'=f(t, x), \quad x(t_0)=x_0. \tag{5.2.1}$$

定义5.2.2 设对任意连续函数$x(t)$：$[t_0, t_0+b)\to E$（$b\leqslant a$），只要$x(t_0)=x_0\in D$，$x(t)$在$[t_0, t_0+b)$上满足方程（5.2.1），就有$x(t)\in D$（$\forall t\in[t_0, t_0+b)$），则称D相对于f是流不变集。

注意，在定义5.2.2中，我们并不事先假定初值问题（5.2.1）有解，而只是说，如果$x(t)$在$[t_0, t_0+b)$上是初值问题（5.2.1）的解，就有$x(t)\in D$（$\forall t\in[t_0, t_0+b)$）。

定义 5.2.3 设 g: $[t_0, t_0+a)\times R_+\to R$. 如果对任给 $m(t)\in C([t_0, t_0+\tau), R_+)$ $(\tau\leqslant a)$, 只要 $m(t_0)=0$, 并且 $m(t)>0(t\in(t_0, t_0+\tau))$ 蕴含着 $m'_+(t)\leqslant g(t, m(t))$, 就有 $m(t)\leqslant 0$. 则称 g 是唯一性函数.

下面讨论流不变集的判定问题.

定理5.2.1 设 E 是Banach空间, D 是 E 中的距离可达集. 设 f: $[t_0, t_0+a)\times E\to E$, 并且存在唯一性函数 g: $[t_0, t_0+a)\times R_+\to R$, 使得对一切 $t\in(t_0, t_0+a)$, $x\in E\setminus D$, $y\in\partial D$, 都有

$$(x-y, f(t,x)-f(t,y))_+\leqslant g(t,\|x-y\|)\|x-y\|. \tag{5.2.2}$$

又设对使得 $N(x)\neq\phi$ 的 $x\in\partial D$, 有

$$(u, f(t,x))_+\leqslant 0, \quad \forall u\in N(x), \ t\in(t_0, t_0+a), \tag{5.2.3}$$

则 D 相对于 f 是流不变集.

证 设 $x_0\in D$, 并且连续函数 $x(t)$: $[t_0, t_0+b)\to E$ 满足方程 (5.2.1). 令 $m(t)=d(x(t), D)$. 则 $m(t_0)=0$. 设对某 $t\in[t_0, t_0+b)$, 有 $m(t)>0$. 因为 D 是距离可达集, 故存在 $p\in D$, 使 $m(t)=\|x(t)-p\|$. 显然 $p\in\partial D$. 令 $u=x(t)-p$, 则显然 $u\in N(p)$. 由定理1.3.2性质(x)可知

$$\begin{aligned} m(t)m'_+(t) &= (u, f(t, x(t)))_+ \\ &\leqslant (x(t)-p, f(t, x(t))-f(t, p))_+ + (u, f(t,p))_+ \\ &\leqslant g(t, m(t))m(t). \end{aligned}$$

从而 $m'_+(t)\leqslant g(t, m(t))$. 故 $m(t)=0$. 产生矛盾, 所以, 对一切 $t\in[t_0, t_0+b)$, 有 $m(t)=0$, 从而对一切 $t\in[t_0, t_0+b)$, $x(t)\in D$. 证完. □

定理5.2.2 设D是Banach空间E中的距离可达集，f：$[t_0, t_0+a)\times E\to E$，并存在唯一性函数$g$：$[t_0,t_0+a)\times E\to E$，使对一切$t\in[t_0, t_0+a)$，$x\in E\setminus D, y\in\partial D$，都有(5.2.2)式成立。又设对任给$x\in\partial D$，

$$\lim_{\lambda\to 0^+}\frac{1}{\lambda}d(x+\lambda f(t,x),D)=0. \tag{5.2.4}$$

则D相对于f是流不变集。

证 设$m(t)=d(x(t),D)$，则$m(t_0)=0$.设对某$t\in[t_0, t_0+b)$，有$m(t)>0$，则存在$p\in\partial D$，使$m(t)=\|x(t)-p\|$.任给$y\in D$，$s>0$，注意到$x(t+s)=x(t)+sf(t, x(t))+o(s)$ $(s\to 0)$，我们有

$$\begin{aligned}\|x(t+s)-y\|\leqslant&\|x(t)-p+s(f(t,x(t))-f(t,p))\|\\&+\|p+sf(t,p)-y\|+o(s).\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}m(t+s)\leqslant&\|x(t)-p+s(f(t,x(t))-f(t,p))\|\\&+d(p+sf(t,p), D)+o(s).\end{aligned} \tag{5.2.5}$$

令$h(s)=m(t,s)$，则利用（5.2.5）式可得

$$\begin{aligned}h(0)h'_+(0)\leqslant&(x(t)-p, f(t,x(t))-f(t,p))_+\\\leqslant&h(0)g(t,h(0)),\end{aligned}$$

从而$m'_+(t)\leqslant g(t, m(t))$，$m(t)\equiv 0$.产生矛盾.证完. □

5.3 微分不等式

在有限维常微分方程理论中，微分不等式是一个重要工具。同样，在无穷维Banach空间常微分方程理论中，微分不等式也起着重要的作用。

设E是Banach空间，P是E中的锥（参见3.2节）。如果P的内部$P^0\neq\phi$，则称P是一个体锥。如果P是体锥，并且 $y-x\in P^0$，则记$x\ll y$。

设P是锥，$P^*=\{\varphi\in E^*|\varphi(x)\geqslant 0,\ \forall x\in P\}$是$P$的共轭锥。若$P$是体锥，记

$$P_0^*=\{\varphi\in E^*|\varphi(x)>0,\ \forall x\in P^0\}.$$

引理5.3.1 设P是锥，则

(i) $x\in P$的充要条件是对一切$\varphi\in P^*$，$\varphi(x)\geqslant 0$；

(ii) 若P是体锥，$x\in\partial P$，则存在$\varphi\in P_0^*$，使$\varphi(x)=0$。

证 (i) 只需证充分性。设对一切$\varphi\in P^*$，$\varphi(x)\geqslant 0$，但$x\bar{\in} P$。则根据凸集分离定理，存在$\psi\in E^*$及实数δ，使得

$$\psi(x)<\delta;\ \psi(y)\geqslant\delta,\ \forall y\in P.$$

由P是锥及$\psi(y)\geqslant\delta(\forall y\in P)$易知$\delta=0$，从而$\psi\in P^*$。但由$\psi(x)<\delta=0$知$\psi\bar{\in} P^*$.矛盾。故(i)成立。

(ii) 设P是体锥，$x\in\partial P$.根据凸集分离定理，存在$\psi\in E^*$，使$\psi(x)=\sup\limits_{y\in P}\psi(y)$，$\psi(y)<\psi(x)$ $(\forall y\in P^0)$。注意到P是锥，故$\sup\limits_{y\subset P}\psi(y)=0$，$\psi(x)=0$。令$\varphi=-\psi$，则任给$y\in P^0$，$\varphi(y)>\varphi(x)=0$，即$\varphi\in P_0^*$。(ii) 成立。□

定义5.3.1 设f：$E\to E$，如果$x\leqslant y$并且对某$\varphi\in P^*$，有$\varphi(x)=\varphi(y)$，则$\varphi(f(x))\leqslant\varphi(f(y))$，那么称$f$是拟增的。

我们首先在P是体锥的情况下讨论微分不等式.下设 $a>0$，(a可以取$+\infty$)。

定理5.3.1 设P是体锥，f：$[t_0,\ t_0+a)\times E\to E$，并且对每一个$t\in[t_0,\ t_0+a)$，$f$是拟增的。设$u$，$v\in C^1[[t_0,t_0+a),E]$，$u(t_0)\ll v(t_0)$

$$u'(t)-f(t,u(t))\ll v'(t)-f(t,v(t)),\ t\in(t_0,t_0+a),\tag{5.3.1}$$

则对一切$t\in[t_0,\ t_0+a)$，有$u(t)\ll v(t)$。

证 若定理的结论不成立，则存在$t_1\in(t_0,\ t_0+a)$，使

$$v(t_1)-u(t_1)\in\partial P;\ v(t)-u(t)\in P^0(t\in[t_0,\ t_1)).$$

根据引理5.3.1(ii)，存在$\varphi\in P_0^*$，使$\varphi(v(t_1)-u(t_1))=0$。令$m(t)=\varphi(v(t)-u(t))$。于是$m(t_1)=0$，并且对$t\in[t_0,t_1)$，$m(t)>0$，从而$m'(t_1)\leqslant 0$。另一方面，注意到$u(t_1)\leqslant v(t_1)$，$\varphi(u(t_1))=\varphi(v(t_1))$，故由$f(t_1,\ \cdot)$的拟增性知

$$m'(t_1)=\varphi(v_1'(t_1)-u_1'(t_1))>\varphi(f(t_1,\ v(t_1))$$
$$-f(t_1,\ u(t_1)))\geqslant 0$$

产生矛盾。故定理5.3.1的结论成立。□

上一定理假定了P是体锥。下面讨论P不假定是体锥的情况。

定理5.3.2 设锥P是Banach空间E中的距离可达集，f：$[t_0,\ t_0+a)\times E\to E$，并且对每个$t\in[t_0,\ t_0+a)$，$f$是拟增的。设$u,\ v\in C^1[[t_0,\ t_0+a),\ E]$，$u(t_0)\leqslant v(t_0)$，

$$u'(t)-f(t,u(t))\leqslant v'(t)-f(t,v(t)),\ t\in(t_0,t_0+a).\tag{5.3.2}$$

又设存在唯一性函数g：$[t_0,\ t_0+a)\times E\to E$，使对一切$x\in E\setminus D,\ y\in\partial D$，都有（5.2.2）式成立（取$D=P$）。则

$$u(t)\leqslant v(t),\ \forall t\in[t_0,\ t_0+a).$$

证 令$w(t)=v(t)-u(t)$。考察初值问题

$$\begin{cases}w'=F(t,\ w),\\ w(t_0)=v(t_0)-u(t_0)\in P,\end{cases}\tag{5.3.3}$$

其中$F(t,\ x)=f(t,\ u(t)+x)-f(t,\ \ u(t))+d(t)$，$d(t)=v'(t)-f(t,\ v(t))-(u'(t)-f(t,\ u(t)))$，$\in P(\forall t\in[t_0,\ t_0+a))$。因为$f$是拟增的，故若$x\in\partial P$，$\varphi\in P^*$，$\varphi(x)=0$，就有$\varphi(F(t,\ x))\geqslant 0$.根据系5.1.1，$\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\frac{1}{\lambda}d(x+\lambda F(t,x),\ P)=0$.又由$F(t,\ x)$的定义及（5.2.2）式可知

$$(x-y,\ F(t,x)-F(t,y))_+\leqslant g(t,\|x-y\|)\|x-y\| \tag{5.3.4}$$

对任给$t\in[t_0,\ t_0+a)$，$x\in E\backslash P,y\in\partial P$成立.根据定理5.2.2,$P$相对于$F$是流不变集.注意到$v(t)-u(t)$是初值问题（5.3.3）的解，所以对一切 $t\in[t_0,\ t_0+a)$，$v(t)-u(t)\in P$,即$u(t)\leqslant v(t)$.□

定理5.3.3 设E是Banach空间，P是E中的锥，$f:[t_0,\ t_0+a)\times E\to E$是连续的，并且对每个$t\in[t_0,\ t_0+a)$，$f$是拟增的．设$u$，$v\in\in C^1[[t_0,\ t_0+a),\ E]$，$u(t_0)\leqslant v(t_0)$，并且（5.3.2）式成立．又设对一切$t\in[t_0,\ t_0+a)$，$x,y\in E$，有

$$[x-y,\ f(t,x)-f(t,y)]_-\leqslant g(t,\|x-y\|), \tag{5.3.5}$$

其中$g\in C[[t_0,\ t_0+a)\times R_+,\ R]$，$g(t,\ 0)\equiv 0$，并且初值问题$u'=g(t,\ u)$，$u(t_0)=0$在$[t_0,\ t_0+a)$上的最大解为零解．则对一切$t\in[t_0,\ t_0+a)$，有$u(t)\leqslant v(t)$。

证 令$w(t)=v(t)-u(t)$，考察初值问题（5.3.3），其中$F(t,x)$如定理5.3.2证明所述，则仿定理5.3.2之证明可知

$$\lim_{\lambda\to 0^+}\frac{1}{\lambda}d(x+\lambda F(t,\ x),\ P)=0, \tag{5.3.6}$$

$[x-y,F(t,x)-F(t,y)]_-\leqslant g(t,\|x-y\|)$，$\forall t\in(t_0,$

$t_0+a),\ x,y\in E.$ (5.3.7)

设定理结论不成立．令$t^*=\sup\{t\in[t_0,\ t_0+a)\,|\,u(t)\leqslant v(t)\}$则$t_0\leqslant t^*<t_0+a$，$w(t^*)=v(t^*)-u(t^*)\in P$．考察初值问题

$$w'=F(t,w),\quad w(t^*)=v(t^*)-u(t^*),\qquad (5.3.8)$$

则由（5.3.6）和（5.3.7）两式及定理4.5.1(在其中令$V(t,x,y)=\|x-y\|$)，并注意到系4.1.1，可知存在$\delta>0$，使初值问题（5.3.8)在$[t^*,\ t^*+\delta]$上存在唯一解$w_1(t)$，并且当$t\in[t^*,\ t^*+\delta]$时$w_1(t)\in P$．由于$w(t)=v(t)-u(t)$是初值问题（5.3.8）的解，故由唯一性知必有$w(t)\equiv w_1(t)$，并且$w(t)\in P(\forall t\in[t^*,\ t^*+\delta])$．此与$t^*$的定义矛盾．□

5.4 最大解与比较定理

本节首先讨论Banach空间常微分方程初值问题

$$x'=f(t,\ x),\quad x(t_0)=x_0 \qquad (5.4.1)$$

最大解的存在性，然后给出某些比较定理．

设E是Banach空间，P是E中的锥．令$B(x_0,b)=\{x\in E\,|\,\|x-x_0\|\leqslant b\}$，$R_0=[t_0,\ t_0+a]\times B(x_0,\ b)$，其中$x_0\in E$，$a$，$b$是两个正实数．本节中使用下列假定：

(i) $f\in C[R_0,E]$，$\|f(t,x)\|\leqslant M(\forall(t,x)\in R_0)$，$Ma<b$；

(ii) 对每个$t\in[t_0,\ t_0+a]$，$f(t,x)$关于x是拟增的；

(iii) P是体锥，并存在$y_0\in P^0$，$\|y_0\|=1$，使对一切n，初值问题

$$x'=f(t,x)+\frac{1}{n}y_0,\quad x(t_0)=x_0+\frac{1}{n}y_0 \qquad (5.4.2)$$

在$[t_0,\ t_0+a]$上存在解$x_n(t)$．

定理5.4.1 设假设（i）、（ii）、（iii）成立．又设P是

正则锥（即若$x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant\cdots\leqslant\overline{x}$，则必存在$x^*\in E$，使$x_n\to x^*$），并且初值问题（5.4.1）在$[t_0, t_0+a]$上有解．则初值问题（5.4.1）在$[t_0, t_0+a]$上必有最大解．

证 设$x_n(t)$是初值问题（5.4.2）的解，即

$$x_n'(t)=f(t, x_n(t))+\frac{1}{n}y_0,$$

$$x_{n+1}'(t)=f(t, x_{n+1}(t))+\frac{1}{n+1}y_0.$$

则显然

$$x_n'(t)-f(t, x_n(t))=\frac{1}{n}y_0\gg\frac{1}{n+1}y_0$$

$$=x'_{n+1}(t)-f(t, x_{n+1}(t)),$$

并且$x_n(t_0)=x_0+\frac{1}{n}y_0\gg x_0+\frac{1}{n+1}y_0=x_{n+1}(t_0)$．于是由定理5.3.1即可知

$$x_{n+1}(x)\ll x_n(t),\quad t\in[t_0, t_0+a].$$

设$x(t)$是初值问题（5.4.1）的解，则仿上可以证明

$$x(t)\ll x_n(t),\quad t\in[t_0, t_0+a],\quad n=1,2,\cdots.\qquad(5.4.3)$$

因为P是正则锥，故对每个$t\in[t_0, t_0+a]$，极限

$$r(t)=\lim_{n\to\infty}x_n(t)$$

存在．任给$\varepsilon>0$，令$\delta=\frac{\varepsilon}{1+M}$，则只要$t, s\in[t_0, t_0+a]$，$|t-s|<\delta$，就有

$$\|x_n(t)-x_n(s)\|\leqslant\left\|\int_s^t\left[f(\tau, x_n(\tau))+\frac{1}{n}y_0\right]d\tau\right\|$$

$$\leqslant (M+1)|t-s| \leqslant \varepsilon .$$

于是$\{x_n(t)\}$等度连续的，从而$x_n(t)$ 在$[t_0, t_0+a]$上一致收敛于$r(t)$.根据定理2.1.1，$r(t)$ 是初值问题（5.4.1）的解，并由（5.4.3）式知$x(t) \leqslant r(t)$，所以$r(t)$是初值问题（5.4.1）的最大解。□

定理5.4.2 设假设（i）、（ii）、（iii）成立，并且初值问题（5.4.2）的解$x_n(t)$ 满足. $\{x_n(t)\}$有子列$\{x_{n_i}(t)\}$收敛于$r(t)$.则初值问题（5.4.1）在$[t_0, t_0+a]$上必有最大解。

证 由定理5.4.1的证明过程即可知。□

定理5.4.3 设假设（i）、（ii）成立，f 在R_0上一致连续，P是E中的体锥。又设对任给$t \in [t_0, t_0+a]$，$S \subset B(x_0, b)$，有

$$\alpha(f(t, S)) \leqslant g(t, \alpha(S)), \qquad (5.4.4)$$

其中$\alpha(\cdot)$ 表非紧性测度，$g \in C[[t_0, t_0+a] \times [0, 2b], R^1]$，$g(t, 0) \equiv 0$，并且$u' = g(t, u)$，$u(t_0) = 0$在$[t_0, t_0+a]$上只有零解。则初值问题（5.4.1）在$[t_0, t_0+a]$上必有最大解。

证 令$M_n = \sup\limits_{(t,x) \in R_0} \left\| f(t,x) + \frac{1}{n} y_0 \right\|$，则$M_n \leqslant M + \frac{1}{n}$。故当$n$充分大时有$aM_n < b$。根据定理3.1.2，对充分大的$n$，初值问题（5.4.2）在$[t_0, t_0+a]$上有解$x_n(t)$，即

$$x_n'(t) = f(t, x_n(t)) + \frac{1}{n} y_0, \quad x_n(t_0) = x_0 + \frac{1}{n} y_0.$$

仿定理3.1.2的证明可知$\{x_n(t)\}$必有子列收敛于某$r(t)$。由定理5.4.1的证明即知$r(t)$ 是初值问题的最大解。□

利用定理3.1.3，我们可以建立与定理5.4.3相似的关于最

大解存在的结论．本书不再叙述．

上面我们讨论了最大解的存在性．类似地，通过讨论初值问题（5.4.1）和初值问题

$$x'=f(t,\ x)-\frac{1}{n}y_0,\ x(t_0)=x_0-\frac{1}{n}y_0$$

（$y_0\in P^0$，$\|y_0\|=1$）的关系，我们可以建立关于最小解存在性的结论．本书不再详述．

下面讨论比较定理．

定理5.4.4 设定理5.4.1的全部条件成立，$r(t)$ 是初值问题（5.4.1）的定义在 $[t_0,\ t_0+a]$ 上的最大解．设$y\in C[[t_0,\ t_0+a],\ E]$，并且

$$y'(t)\leqslant f(t,\ y(t)),\ y(t_0)=x_0,$$

则对一切 $t\in[t_0,\ t_0+a]$，有 $y(t)\leqslant r(t)$ ．

证 证明与定理5.4.1的证明类似，只需用 $y(t)$ 代替定理5.4.1证明中的$x(t)$ 即可． □

显然，在定理5.4.2或定理5.4.3的条件下，定理 5.4.4 的结论仍然成立．

5.5 拟线性化方法

作为前几节结论的一个应用，在本节中我们利用拟线性化方法，讨论Banach空间常微分方程解的若干性质．下设 E 是Banach空间．

设$f\in C[[t_0,\ t_0+a]\times E,\ E]$．设在某$x\in E$处，$f(t,\ x)$ 关于x的Frechet偏导数$f_x'(t,\ x)$ 存在，即

$$f(t,\ x+h)=f(t,x)+f_x'(t,x)h+\|h\|\eta(t,x,h)\ ,\tag{5.5.1}$$

这里$h\in E$，$\lim\limits_{\|h\|\to 0}\|\eta(t,x,h)\|=0$。

设P是E中的锥。我们称$f(t, x)$在E中是凸的，若对$t\in[t_0,t_0+a]$和一切x，$y\in E$，有

$$f[t, \lambda x+(1-\lambda)y]\leqslant \lambda f(t, x)+(1-\lambda)f(t, y),$$
$$0\leqslant\lambda\leqslant 1. \qquad (5.5.2)$$

引理5.5.1 设$f\in C[[t_0, t_0+a]\times E, E]$，并且当$x\in B(x_0, b)=\{x\in E\,|\,\|x-x_0\|\leqslant b\}$时$f'_x(t,x)$存在。设$P$是$E$中的锥，$f(t,x)$在$E$中是凸的。则对任给$t\in[t_0,t_0+a]$，$x\in B(x_0, b)$，$h\in E$，有$\eta(t, x, h)\in P$，其中$\eta(t, x, h)$由(5.5.1)式定义。

证 设$t\in[t_0, t_0+a]$，$x\in B(x_0, b)$。设$y\in E$，$\lambda\in(0,1)$，令$z=x+\frac{1}{1-\lambda}y$，则$x+y=\lambda x+(1-\lambda)z$。于是由(5.5.1)和(5.5.2)两式可得

$$\begin{aligned}\|y\|\eta(t,x,y)&=f(t,x+y)-f(t,x)-f'_x(t,x)y\\&\leqslant\lambda f(t,x)+(1-\lambda)f(t,z)-f(t,x)-f'_x(t,x)y\\&=(1-\lambda)\left[f(t, z)-f(t, x)-f'_x(t,x)\frac{y}{1-\lambda}\right]\\&=(1-\lambda)\left\|\frac{y}{1-\lambda}\right\|\eta\left(t, x, \frac{y}{1-\lambda}\right)\\&=\|y\|\,\eta\left(t, x, \frac{y}{1-\lambda}\right).\end{aligned}$$

因此

$$\eta(t, x, y)\leqslant\eta\left(t, x, \frac{y}{1-\lambda}\right).$$

在该式中，令 $y=\frac{h}{n}$，$\lambda=1-\frac{1}{n}$，得$\eta(t, x, h)\geqslant\eta\left(t, x, \frac{h}{n}\right)$。令$n\to\infty$，即得$\eta(t, x, h)\geqslant\theta$。□

引理5.5.2 在引理5.5.1的条件下，若又假设对每个$t\in[t_0, t_0+a]$，$f(t, x)$关于x是拟增的。则

$$G(t,v)=f(t,\alpha(t))+f_x'(t,\alpha(t))(v-\alpha(t))$$

对每个$t\in[t_0, t_0+a]$关于v是拟增的，这里$\alpha(t)$是映$[t_0,t_0+a]$入$B(x_0, b)$的任意一连续函数。

证 设$y, z\in E$，$y\leqslant z$，并且对某$\varphi\in P^*$，有$\varphi(y)=\varphi(z)$，则$\varphi(y-z+\alpha(t))=\varphi(\alpha(t))$。因为$f$是拟增的，所以

$$\varphi(f(t,y-z+\alpha(t)))\leqslant\varphi(f(t,\alpha(t)))。\qquad(5.5.3)$$

注意到$f_x'(t, x)$对$x\in B(x_0, b)$存在，故有

$$\begin{aligned}&\varphi(f(t,y-z+\alpha(t)))-\varphi(f(t,\alpha(t)))\\&=\varphi[f_x'(t,\alpha(t))(y-z)]+\|y-z\|\varphi(\eta(t,\alpha(t),\\&\qquad y-z))。\end{aligned}\qquad(5.5.4)$$

由引理5.5.1知$\eta(t, \alpha(t), y-z)\in P$，所以由(5.5.3)和(5.5.4)两式可知$\varphi[f_x'(t, \alpha(t))(y-z)]\leqslant 0$，即

$$\varphi[f_x'(t, \alpha(t))y]\leqslant\varphi[f_x'(t, \alpha(t)z]。$$

因此可知$G(t, v)$关于v是拟增的.证完。□

定理5.5.1 设$f\in C[[t_0, t_0+a]\times E, E]$，$\|f(t, x)\|\leqslant M(\forall(t, x)\in[t_0, t_0+a]\times B(x_0, b)$，并且对每个$t\in[t_0,t_0+a]$，$f(t, x)$关于$x$是拟增的、凸的.设对$(t, x)\in[t_0,t_0+a]\times B(x_0, b)$，$f_x'(t, x)$存在、连续，并满足$\|f_x'(t,x)\|\leqslant L$。最后设$P$是正则锥，$P^0\neq\phi$，并且

$$a(M+2Lb)\leqslant b。\qquad(5.5.5)$$

则存在定义在$[t_0, t_0+a]$上的函数列$\{z_n(t) | z_n(t): [t_0, t_0+a] \to E, n=1, 2, \cdots\}$，满足

(i) 对每个$n=1, 2, \cdots$，$z_n(t)$ 是线性微分方程

$$\begin{cases} z'=f(t,z_{n-1})+f'_x(t,z_{n-1})(z-z_{n-1}), \\ z(t_0)=x_0 \end{cases} \tag{5.5.6}$$

的解，其中$z_0(t)\equiv x_0$；

(ii) $z_n(t)\leqslant x(t)$，这里$x(t)$ 是初值问题

$$x'=f(t, x), \quad x(t_0)=x_0 \tag{5.5.7}$$

的解；

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n(t)=x(t)$ 关于 $t\in[t_0, t_0+a]$一致成立。

证 由$\|f'_x(t, x)\|\leqslant L$可知$f(t, x)$在$[t_0,t_0+a]\times B(x_0, b)$上满足Lipschitz条件，从而初值问题（5.5.7）有定义在$[t_0, t_0+a]$上的唯一解$x(t)$。更进一步，对每个$\alpha(t)\in C[[t_0, t_0+a], B(x_0,b)]$，初值问题

$$\begin{cases} y'=f(t,\alpha(t))+f'_x(t,\alpha(t))(y-\alpha(t)) \\ y(t_0)=x_0 \end{cases} \tag{5.5.8}$$

具有唯一的定义$[t_0, t_0+a]$上的解$y_\alpha(t)$，并且 $y_\alpha(t)\in B(x_0, b)$（$\forall t\in[t_0, t_0+a)$（利用系 2.2.1 并注意到（5.5.5)式）。取$z_0(t)\equiv x_0$，令$z_1(t)$是

$$z'=f(t,x_0)+f'_x(t,x_0)(z-x_0), \quad z(t_0)=x_0$$

的解，则$z_1(t)\in B(x_0,b)$。用归纳法确定$z_n(t)$为

$$\begin{cases} z'=f(t,z_{n-1}(t))+f'_x(t,z_{n-1}(t))(z-z_{n-1}(t)) \\ z(t_0)=x_0 \end{cases}$$

的解（$n=2, 3, \cdots$）. 下证

$$z_n(t)\leqslant x(t), \quad t\in[t_0, t_0+a].$$

事实上，由$f(t, x)$关于x的凸性知

$$\frac{1}{\lambda}[f(t,z_{n-1}(t)+\lambda(z_n(t)-z_{n-1}(t)))-f(t,z_{n-1}(t))]$$

$$\leqslant f(t,z_n(t))-f(t,z_{n-1}(t)). \qquad (5.5.9)$$

注意到

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}[f(t,z_{n-1}(t)+\lambda(z_n(t)-z_{n-1}(t)))-f(t,z_{n-1}(t))]$$

$$=f'_x(t,z_{n-1}(t))(z_n(t)-z_{n-1}(t)),$$

所以由（5.5.9）式可知

$$f(t,z_{n-1}(t))+f'_x(t,z_{n-1}(t))(z_n(t)-z_{n-1}(t))$$

$$\leqslant f(t, z_n(t)) .$$

注意到 $z'_n(t)=f(t, z_{n-1}(t))+f'_x(t, z_{n-1}(t))(z_n(t)-z_{n-1}(t))$，故有

$$z'_n(t)\leqslant f(t,z_n(t)), \qquad (5.5.10)$$

根据定理5.4.4，

$$z_n(t)\leqslant x(t),\ t\in[t_0,\ t_0+a].$$

又由（5.5.10）式可知

$$z_n(t)\leqslant f(t,z_n(t))$$

$$=f(t,z_n(t))+f'_x(t,z_n(t))[z_n(t)-z_n(t)]$$，从而再利用定理5.4.4（注意到引理5.5.2）

$$z_n(t)\leqslant z_{n+1}(t),\ t\in[t_0,t_0+a].$$

由于P是正则锥，故仿定理5.4.1之证明可知$\{z_n(t)\}$必在$[t_0,\ t_0+a]$上一致收敛于某$z(t)$.于是

$$\left\| z_n(t)-z_n(t_0)-\int_{t_0}^{t} f(s,\ z_{n-1}(s))ds \right\|$$

$$=\left\|\int_{t_0}^{t} f'_x(s,\ z_{n-1}(s))(z_n(s)-z_{n-1}(s))ds\right\|$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{t} \|f'_x(s,\ z_{n-1}(s))(z_n(s)-z_{n-1}(s))\| ds$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{t} L\|z_n(s)-z_{n-1}(s)\| ds.$$

令$n\to\infty$，得

$$\left\|z(t)-x_0-\int_{t_0}^{t} f(s,\ z(s))ds\right\|\leqslant 0,$$

即$z(t)$是初值问题（5.5.7）的解．由初值问题（5.5.7）解的唯一性知$z(t)\equiv x(t)$．□

在定理5.5.1中，我们假定了$f(t,\ x)$关于x是凸算子．如果$f(t,\ x)$是凹的，即对$t\in[t_0,\ t_0+a]$和一切$x,\ y\in E$，$0\leqslant\lambda\leqslant 1$，有

$$f[t,\lambda x+(1-\lambda)y]\geqslant\lambda f(t,x)+(1-\lambda)f(t,y),$$

我们也可以建立与定理5.5.1相似的结论．

5.6 附　　注

定理5.1.1和定理5.1.2取自Deimling[1]．关于流不变集的定理5.2.1和定理5.2.2是Volkmann[1]、[2]中证明的．关于流不变集的进一步讨论可见Brezis[1]，Ladde和Lakshmikantham[1]，Redheffer[1]和Deimling[1]．

拟增的概念和定理5.3.1是属于Volkman[3]的．关于微分不等式的定理5.3.2和定理5.3.3选自Deimling[1]．与此有关的其它讨论见Redheffer[1]、[2]，最大解，最小解以

及与此有关的比较定理(定理5.4.1,定理5.4.2，定理5.4.3和定理5.4.4)见Lakshmikantham，Mıtchell和Mıtchell〔1〕.

利用拟线性化的方法研究Banach空间常微分方程的工作见Lakshmikantham，Mitchell和Sety〔1〕.定理5.5.1就是这一工作的主要结果.

第六章　非线性半群与Banach空间常微分方程

在本章中，我们着重讨论与耗散型算子相关联的某些类型的Banach空间常微分方程，重点研究初值问题解的存在性问题。本章所利用的工具是非线性压缩半群理论。

本章的前三节分别讨论了非线性半群、耗散型算子以及反映它们之间本质联系的指数公式。在后两节中，我们以非线性半群作为工具，分别讨论了含耗散项的自治和拟自治方程解的存在性和唯一性。

6.1　非线性半群

设E是Banach空间，F是E的一个闭子集。

定义6.1.1　设$\{T(t)|t\geqslant 0\}$是映F入F的映射族（以t为参数），满足：

(i) $T(0)x=x$，$\forall x\in F$；

(ii) $T(t+s)x=T(t)T(s)x$，$\forall x\in F$，t，$s\geqslant 0$；

(iii) 对任给固定的$x\in F$，$T(t)x$关于t连续；则称$\{T(t)|t\geqslant 0\}$是F上的一个非线性半群。

定义6.1.2　若$\{T(t)|t\geqslant 0\}$是F上的一个非线性半群，并存在$\omega\in R$，使

$$\|T(t)x-T(t)y\|\leqslant\|x-y\|e^{\omega t}，\quad t\geqslant 0，x，y\in F，\tag{6.1.1}$$

则$\{T(t)|t\geqslant 0\}$称为是F上的ω-型非线性半群．F上的0-型非线性半群又称非线性压缩半群．

设$T=\{T(t)|t\geqslant 0\}$是F上的非线性半群，$h>0$，令

$$A_h x=\frac{1}{h}(T(h)x-x),\quad x\in F, \tag{6.1.2}$$

$$D(A)=\{x\in F|\lim_{h\to 0^+}A_h x\text{存在}\},$$

$$Ax=\lim_{h\to 0^+}A_h x,\quad \forall x\in D(A), \tag{6.1.3}$$

则A称为是非线性半群T的生成元．

非线性半群和Banach空间常微分方程之间，有着非常密切的关系．这从下一定理的证明可以看出．

定理6.1.1 设F是E的闭子集．设$A:F\to E$连续，并满足

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}d(x+hAx,\ F)=0, \tag{6.1.4}$$

$$[x-y,Ax-Ay]_-\leqslant\omega\|x-y\|,\ \forall x,y\in F, \tag{6.1.5}$$

其中ω是一实数．则A是F上的某一ω-型非线性半群的生成元．反之，设$T=\{T(t)|t\geqslant 0\}$是F上的ω-型非线性半群，T的生成元A在整个F上有定义，并且连续，则A满足（6.1.4）和（6.1.5）两式．

证 考察Banach空间常微分方程初值问题

$$u'=Au,\quad u(0)=x\in F, \tag{6.1.6}$$

其中$A:F\to E$连续，并满足（6.1.4）和（6.1.5）两式．根据定理4.5.2，初值问题（6.1.6）在$[0,+\infty)$上具有唯一的解$u(t,\ x)$，并且$u(t,\ x)\in F$，$\forall t\geqslant 0$．令$T(t)x=u(t,\ x)$，则显

然T是F上的非线性半群。对 $t\geqslant 0$，$x\in F$，$y\in F$，令 $m(t)=\|u(t, x)-u(t, y)\|$，则有

$$m'_-(t)\leqslant[u(t,x)-u(t,y), f(u(t,x))-f(u(t,y))]_-$$
$$\leqslant\omega m(t)$$

积分此不等式，得$\|u(t,x)-u(t,y)\|\leqslant\|x-y\|e^{\omega t}$，即 $\|T(t)x-T(t)y\|\leqslant\|x-y\|e^{\omega t}$。所以$T$是$\omega$-型非线性半群。任给$x\in F$，

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}(T(h)x-x)=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}[u(h,x)-u(0,x)]$$
$$=Au(0)=Ax。$$

这表明A是T的生成元。定理第一部分证完。

下设T是F上的ω-型非线性半群，其生成元A：$F\to E$ 连续。任给$x\in F$，$h>0$，有$T(h)x\in F$，所以

$$\frac{1}{h}d(x+hAx, F)\leqslant\frac{1}{h}\|x+hAx-T(h)x\|$$
$$=\left\|Ax-\frac{T(h)x-x}{h}\right\|,$$

由生成元的定义即可知（6.1.4）式成立。

对$x\in F$，$y\in F$，

$$[x-y, Ax-Ay]_+$$
$$\leqslant\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\Big\{[\|T(h)x-T(h)y\|-\|x-y\|]$$
$$+\left[\left\|Ax-\frac{T(h)x-x}{h}\right\|\right]+\left[\left\|Ay-\frac{T(h)y-y}{h}\right\|\right]\Big\}$$
$$\leqslant\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}[e^{\omega h}\|x-y\|-\|x-y\|]$$
$$=\omega\|x-y\|。$$

故（6.1.5）式立。定理的第二部分证完。□

由于常微分方程与非线性半群之间有密切关系，所以非线性半群理论成为研究Banach空间常微分方程的一个重要工具。

6.2 耗散算子

本节讨论与非线性压缩半群密切相关的耗散算子的性质。

定义6.2.1 设E是Banach空间，$A: E\to 2^E$是多值算子，$D(A)=\{x\in E \mid Ax\neq\phi\}$。如果对任给$x_1\in D(A)$，$x_2\in D(A)$，$y_1\in Ax_1$，$y_2\in Ax_2$，都有

$$[x_1-x_2,\ y_1-y_2]_-\leqslant 0, \tag{6.2.1}$$

则称A是一个耗散算子。

定理6.2.1 设$A: E\to 2^E$是多值算子，则下列命题是等价的：

(i) A是耗散算子；

(ii) 对任给$\lambda>0$，$x_1\in D(A)$，$x_2\in D(A)$，$y_1\in Ax_1$，$y_2\in Ax_2$，有

$$\|x_1-x_2\|\leqslant\|x_1-\lambda y_1-(x_2-\lambda y_2)\|; \tag{6.2.2}$$

(iii) 对任给$\lambda>0$，$(I-\lambda A)^{-1}$是单值的，并且是非扩展的，即对任给u_1，$u_2\in R(I-\lambda A)$（$R(I-\lambda A)$表$I-\lambda A$的值域），有

$$\|(I-\lambda A)^{-1}u_1-(I-\lambda A)^{-1}u_2\|\leqslant\|u_1-u_2\|. \tag{6.2.3}$$

证 (i)⇒(ii)。设$x_1\in D(A)$，$x_2\in D(A)$，$y_1\in Ax_1$，$y_2\in Ax_2$，则由A是耗散算子及$[\cdot,\ \cdot]_-$的定义，并注意到$[x,y]_h$是

h的增函数，可知

$$\sup_{\lambda>0}-\frac{1}{\lambda}(\|x_1-x_2-\lambda(y_1-y_2)\|-\|x_1-x_2\|)$$

$$=\lim_{\lambda\to0^+}-\frac{1}{n}(\|x_1-x_2-\lambda(y_1-y_2)\|-\|x_1-x_2\|)$$

$$=[x_1-x_2,\ y_1-y_2]_-\leqslant 0.$$

从而对任给 $\lambda>0$，$-\frac{1}{\lambda}[\|x_1-x_2-\lambda(y_1-y_2)\|-\|x_1-x_2\|]$

$\leqslant 0$.这意味着（6.2.2）式成立。

(ii)⇒(iii).设$\lambda>0$，w_1，$w_2\in D(A)$，$w_1\neq w_2$。则（6.2.2）式表明（$(I-\lambda A)w_1\cap(I-\lambda A)w_2=\phi$。因此（$(I-\lambda A)^{-1}$是单值的。(6.2.3）式显然是（6.2.2）式的推论。

(iii)⇒(i).设（$(I-\lambda A)^{-1}$对任给$\lambda>0$都是单值非扩展的。任给$x_i\in D(A)$，$y_i\in Ax_i$（$i=1,2$），则$x_i-\lambda y_i\in R(I-\lambda A)$，从而$x_i=(I-\lambda A)^{-1}(x_i-\lambda y_i)$（$i=1,2$）.故由（6.2.3)式可知（令$u_i=x_i-\lambda y_i$）

$$-\frac{1}{\lambda}[\|x_1-x_2-\lambda(y_1-y_2)\|-\|x_1-x_2\|]\leqslant0,\quad\forall\lambda>0.$$

令$\lambda\to0^+$，即得$[x_1-x_2,\ y_1-y_2]_-\leqslant 0$.□

设A是耗散算子，$\lambda>0$，令$J_\lambda=(I-\lambda A)^{-1}$.下面给出$J_\lambda$的若干性质。

定理6.2.2 (i) 若$\lambda>0$，$x\in D(J_\lambda^n)$，则

$$\|J_\lambda^n x-x\|\leqslant n\|J_\lambda x-x\|,\quad n=1,2,3\cdots;\qquad(6.2.4)$$

(ii)若 λ，$\mu>0$，$x\in D(J_\lambda)$，则$\frac{\mu}{\lambda}x+\frac{\lambda-\mu}{\lambda}J_\lambda x\in D(J_\mu)$，

并且$J_\lambda x=J_\mu\left(\frac{\mu}{\lambda}x+\frac{\lambda-\mu}{\lambda}J_\lambda x\right)$；

(iii)若$\lambda>0$，$\mu>0$，$x\in D(J_\lambda)$，$y\in D(J_\mu)$，则

$$\|J_\lambda x-J_\mu y\|\leqslant\frac{\mu}{\lambda+\mu}\|x-J_\mu y\|+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\|J_\lambda x-y\|\,;\tag{6.2.5}$$

(iv)若$\lambda>0$，$x\in D(A)\cap R(I-\lambda A)$，则

$$\|J_\lambda x-x\|\leqslant\lambda\cdot\inf\{\|y\|\,|\,y\in Ax\}.\tag{6.2.6}$$

证 (i)根据定理6.2.1，J_λ是单值非扩展的，从而

$$\|J_\lambda^n x-x\|=\|\sum_{k=1}^n(J_\lambda^k x-J_\lambda^{k-1}x)\|\leqslant\sum_{k=1}^n\|J_\lambda^k x-J_\lambda^{k-1}x\|$$

$$\leqslant n\|J_\lambda x-x\|.$$

(ii)设$x\in D(J_\lambda)$，则存在$x_0\in D(A)$，$y_0\in Ax_0$，使$x=x_0-\lambda y_0$.因为

$$\frac{\mu}{\lambda}x+\frac{\lambda-\mu}{\lambda}J_\lambda x=\frac{\mu}{\lambda}(x_0-\lambda y_0)+\frac{\lambda-\mu}{\lambda}x_0$$

$$=x_0-\mu y_0,$$

所以$\frac{\mu}{\lambda}x+\frac{\lambda-\mu}{\lambda}J_\lambda x\in(I-\mu A)x_0$，并且

$$J_\mu\Big(\frac{\mu}{\lambda}+\frac{\lambda-\mu}{\lambda}J_\lambda x\Big)=x_0=J_\lambda x.$$

(iii)设$x\in D(J_\lambda)$，$y\in D(J_\mu)$，令$\tau=\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}$.则由(ii)知

$$J_\tau\Big(\frac{\mu}{\lambda+\mu}x+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}J_\lambda x\Big)=J_\lambda x,$$

$$J_\tau\Big(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}y+\frac{\mu}{\lambda+\mu}J_\mu y\Big)=J_\mu y.$$

由于J_τ是非扩展的，故

$$\|J_\lambda x-J_\mu y\|$$

$$\leqslant\left\|\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}x+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}J_\lambda x\right)-\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}y+\frac{\mu}{\lambda+\mu}J_\mu y\right)\right\|$$

$$\leqslant\frac{\mu}{\lambda+\mu}\|x-J_\mu y\|+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\|J_\lambda x-y\|.$$

(iv) 令$x\in D(A)\cap R(I-\lambda A)$，$y\in Ax$。令 $z=x-\lambda y$，则$z\in R(I-\lambda A)$，$x\in(I-\lambda A)^{-1}z$。注意到$J_\lambda=(I-\lambda A)^{-1}$的单值非扩展性，得

$$\|J_\lambda x-x\|=\|J_\lambda x-J_\lambda z\|\leqslant\|x-z\|=\lambda\|y\|.$$

由此即知（iv）成立.□

6.3 指数公式

本节我们将研究耗散算子和非线性压缩半群的关系.

定理6.3.1 设A是耗散算子，满足

$$\overline{D(A)}\subset R(I-\lambda A),\quad \forall\lambda>0. \tag{6.3.1}$$

则对任给$x\in\overline{D(A)}$，极限

$$T(t)x=\lim_{n\to\infty}\left(I-\frac{t}{n}A\right)^{-n}x\quad(t\geqslant0) \tag{6.3.2}$$

存在，并且对任给$\tau>0$，上述极限对$t\in[0,\tau]$一致成立. 更进一步，由（6.3.2）式定义的$\{T(t)|t\geqslant0\}$是$\overline{D(A)}$上的非线性压缩半群.

证 设$x\in D(A)$及$t>0$给定. 下面首先证明$\left\{\left(I-\frac{t}{n}\right)^{-n}x\,\middle|\,n=1,2,\cdots\right\}$是$E$中的基本列. 任给自然数$m$，$n$及实数$\lambda>0$，

$u>0$，下证

$$\|J_\lambda^m x-J_\mu^n x\| \leqslant [(m\lambda-n\mu)^2+m\lambda^2+n\mu^2]^{\frac{1}{2}}\cdot\inf\{\|y\| \mid y\in Ax\}. \tag{6.3.3}$$

事实上，由定理6.2.2 (i)、(iv)，有

$$\|J_\lambda^m x-J_\mu^0 x\|\leqslant m\|J_\lambda x-x\|\leqslant m\lambda\cdot\inf\{\|y\| \mid y\in Ax\},$$

$$\|J_\lambda^0 x-J_\mu^n x\|\leqslant n\|J_\mu x-x\|\leqslant n\mu\cdot\inf\{\|y\| \mid y\in Ax\}.$$

故当$n=0$或$m=0$时（6.3.3）式成立．下设（6.3.3）式当n换成$n-1$或m换成$m-1$时成立，则由定理6.2.2(iii) 可知

$$\begin{aligned}
&\|J_\lambda^m x-J_\mu^n x\|\\
\leqslant&\frac{\mu}{\lambda+\mu}\|J_\lambda^{m-1} x-J_\mu^n x\|+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\|J_\lambda^m x-J_\mu^{n-1} x\|\\
\leqslant&\frac{\mu}{\lambda+\mu}[((m-1)\lambda-n\mu)^2+(m-1)\lambda^2+n\mu^2]^{\frac{1}{2}}\\
&\cdot\inf\{\|y\| \mid y\in Ax\}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}[((m\lambda-(n-1)\mu)^2+m\lambda^2\\
&+(n-1)\mu^2]^{\frac{1}{2}}\cdot\inf\{\|y\| \mid y\in Ax\}\\
\leqslant&\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{\mu}{\lambda+\mu}[((m-1)\lambda-n\mu)^2+(m-1)\lambda^2\right.\\
&\left.+n\mu^2]+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}[(m\lambda-(n-1)\mu)^2+m\lambda^2+(n-1)\mu^2]\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&\cdot\inf\{\|y\| \mid y\in Ax\}\\
=&[(m\lambda-n\mu)^2+m\lambda^2+n\mu^2]^{\frac{1}{2}}\cdot\inf\{\|y\| \mid y\in Ax\}.
\end{aligned}$$

因此由数学归纳法知（6.3.3）式对一切自然数m，n都成立．

在（6.3.3）式中令$\lambda=\frac{t}{m}$，$\mu=\frac{t}{n}$，即知

$$\|J_\lambda^m x-J_\mu^n x\|$$

$$\leqslant\left[\frac{t^2}{m}+\frac{t^2}{n}\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\inf\{\|y\|\,|\,y\in Ax\},\tag{6.3.4}$$

从而$\left\{\left(I-\frac{t}{n}\right)^{-n}x\,|\,n=1,\ 2,\ \cdots\right\}$是基本列.因此极限（6.3.2）式存在.由（6.3.4）式又易知对任给$\tau>0$，极限（6.3.2）对$t\in[0,\ \tau]$一致存在.

因为对任给$\lambda>0$，及自然数n，J_λ^n都是非扩展的，故易知极限（6.3.2）对$x\in\overline{D(A)}$也存在，并且对任给$\tau>0$，极限关于$t\in[0,\ \tau]$一致存在.显然对每个t，由（6.3.2）式定义的$T(t)$在$\overline{D(A)}$上都是非扩展的.

任给$t\geqslant0$，$s\geqslant0$，在（6.3.3）式中令$m=n$，$\lambda=\frac{t}{n}$，$\mu=\frac{s}{n}$，则可知对$x\in D(A)$，有

$$\left\|\left(I-\frac{t}{n}A\right)^{-n}x-\left(I-\frac{s}{n}A\right)^{-n}x\right\|$$

$$\leqslant\left[(t-s)^2+\frac{t^2}{n}+\frac{s^2}{n}\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\inf\{\|y\|\,|\,y\in Ax\}.$$

令$n\to\infty$，得

$$\|T(t)x-T(t)x\|\leqslant|t-s|.\inf\{\|y\|\,|\,y\in Ax\}.\tag{6.3.5}$$

这表明对固定的$x\in D(A)$，$T(t)x$关于t是连续的.由于$T(t)$的非扩展性可知当$x\in\overline{D(A)}$时，$T(t)x$关于t也是连续的.

最后证明当$t\geqslant0$，$s\geqslant0$，$x\in\overline{D(A)}$时$T(s+t)x=T(s)$

$T(t)x$.事实上，对任给自然数m，

$$T(mt)x=\lim_{n\to\infty}\left(I-\frac{mt}{n}A\right)^{-n}x$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left(I-\frac{mt}{mk}A\right)^{-mk}x \quad (令n=mk)$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left[\left(I-\frac{t}{k}A\right)^{-k}\right]^{m}x=T(t)^{m}x. \qquad (6.3.6)$$

设$t>0$，$s>0$，并均为有理数时，必存在自然 数p，q_1，q_2，使$t=\frac{q_1}{p}$，$s=\frac{q_2}{p}$.所以由（6.3.6）式可得

$$T(t+s)x=T\left(\frac{q_1+q_2}{p}\right)x=T\left(\frac{1}{p}\right)^{q_1+q_2}x$$

$$=T\left(\frac{1}{p}\right)^{q_1}T\left(\frac{1}{p}\right)^{q_2}x=T\left(\frac{q_1}{p}\right)T\left(\frac{q_2}{p}\right)x$$

$$=T(t)T(s)x.$$

由于$T(t)x$关于t连续，所以对任给$t\geqslant 0$，$s\geqslant 0$，都有$T(t+s)x=T(t)T(s)x$.定理全部证完.□

定理6.3.1中的公式（6.3.2）称为指数公式.

6.4 含耗散项的自治微分方程

本节着重讨论含耗散项的自治微分方程

$$\begin{cases} u'(t)\in Au(t), & t\geqslant 0 \\ u(0)=x \end{cases} \qquad (6.4.1)$$

其中$A:E\to 2^E$是一个耗散算子.

定义6.4.1 设$u(t)$：$[0, +\infty)\to E$ 连续，在$(0,+\infty)$的每一紧区间上满足Lipschitz条件，在$(0,+\infty)$上几乎处处可微，$u(0)=x$，并且对几乎一切$t>0$，有$u(t)\in D(A)$，$u'(t)\in Au(t)$，则$u(t)$称为是方程（6.4.1）的强解，下简称是方程（6.4.1）的解。

先做若干准备。

引理6.4.1 设C是E中的闭凸集，B：$C\to C$是非扩展算子。则对每一$x\in C$，初值问题

$$u'(t)=Bu-u,\quad u(0)=x \tag{6.4.2}$$

在$[0, +\infty)$上有唯一解$u(t)$，使得对一切$t\geqslant 0$，$u(t)\in C$，并且下列不等式成立：

$$\|u(n)-B^n x\|\leqslant\sqrt{n}\,\|x-Bx\|,\quad n=1,2,\cdots \tag{6.4.3}$$

证 显然初值问题(6.4.2)等价于

$$u(t)=e^{-t}x+\int_0^t e^{s-t}Bu(s)ds,\quad 0\leqslant t<\infty \tag{6.4.4}$$

设T_0是固定的正数。注意到映射

$$\Phi(u)(t)=e^{-t}x+\int_0^t e^{s-t}Bu(s)ds$$

映闭凸集

$$\{u\in C([0, T_0], E)\,|\,u(t)\in C,\ 0\leqslant t\leqslant T_0\}$$

入自身，并且Φ是具有常数$(1-e^{-T_0})$的Lipschitz映射，故由压缩映射原理知方程(6.4.4)可解。

因为$B-I$是耗散算子，故由(6.4.2)式知

$$\frac{d}{dt}\|u(t)-x\|\leqslant\|Bx-x\|$$

对几乎一切$t>0$成立，因此

$$\|u(t)-x\|\leqslant t\|x-Bx\|,\quad 0\leqslant t<\infty \tag{6.4.5}$$

显然我们有

$$u(t)-B^n x$$
$$=e^{-t}(x-B^n x)+\int_0^t e^{s-t}(Bu(s)-B^n x)ds,\quad t\geqslant 0.$$

因为

$$\|x-B^n x\|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\|B^{k-1}x-B^k x\|\leqslant n\|x-Bx\|,$$

从而

$$\|u(t)-B^n x\|\leqslant ne^{-t}\|x-Bx\|+\int_0^t e^{s-t}\|u(s)-B^{n-1}x\|ds. \tag{6.4.6}$$

令$\varphi_n(t)=\|u(t)-B^n x\|$，下证

$$\varphi_n(t)\leqslant((n-t)^2+t)^{\frac{1}{2}}\|x-Bx\|,\quad t>0. \tag{6.4.7}$$

$n=0$时由（6.4.4）式知（6.4.7）式成立.设对$n-1$,(6.4.7)式成立，即$\varphi_{n-1}(t)\leqslant((n-1-t)^2+t)^{\frac{1}{2}}\|x-Bx\|$.注意到（6.4.6）式，我们有

$$\varphi_n(t)\leqslant ne^{-t}\|x-Bx\|+\int_0^t e^{s-t}((n-1-s)^2+s)^{\frac{1}{2}}\|x-Bx\|ds$$
$$=\psi_n(t)e^{-t}\|x-Bx\|,$$

其中$\psi_n(t)=n+\int_0^t e^s((n-1-s)^2+s)^{\frac{1}{2}}ds$.初等计算表明$\psi_n(t)$

$e^{-t}\leqslant((n-t)^2+t)^{\frac{1}{2}}$，从而（6.4.7）式对$n$成立. 在（6.4.7）式中令$t=n$，即得（6.4.3）式.□

引理6.4.2 设对每一$x\in D(A)$，初值问题（6.4.1）至少有一解$u(t;x)$在$[0,+\infty)$上有定义.则

(i) $\|u(t;x)-u(t;y)\|\leqslant\|x-y\|$；$\forall t\geqslant 0, x,y\in D(A)$；

(ii) 对几乎一切$t\geqslant 0$，有$\|u'_t(t;x)\|=|Au(t;x)|\leqslant|Ax|$

其中$|Au(t; x)|=\inf\{\|y\| \mid y\in Au(t; x)\}$，$|Ax|=\inf\{\|y\| \mid y\in Ax\}$；

(iii) $\|u(t; x)-x\|\leqslant t|Ax|$，$\forall t\geqslant 0$，$x\in D(A)$；

(iv) 若令$T(t)x=u(t; x)$，并仍以$T(t)$表示$T(t)$在$\overline{D(A)}$上的扩张，则 $T(t)$ 是$\overline{D(A)}$ 上一非线性压缩半群。

证 设x，$y\in D(A)$，则对几乎一切$t>0$，有

$$\frac{d}{dt}(u(t; x)-u(t; y))\in Au(t; x)-Au(t; y).$$

令 $m(t)=\|u(t; x)-u(t; y)\|$，则由引理 1.3.2 知对几乎一切 $t>0$，有

$$m_-'(t)=[u(t; x)-u(t; y), v_x-v_y]_-\leqslant 0,$$

其中$v_x\in Au(t; x)$，$v_y\in Au(t; y)$.所以

$$\|u(t;x)-u(t;y)\|\leqslant\|u(0;x)-u(0;y)\|=\|x-y\|. \tag{6.4.8}$$

(i) 获证。

任给$x\in D(A)$.取$s>0$固定，使$u(s; x)\in D(A)$.令$n(t)=\|u(t; x)-u(s; x)\|$，则由引理1.3.2知

$$\begin{aligned}n_-'(t)&=[u(t; x)-u(s; x), u'(t; x)]_-\\&\leqslant[u(t; x)-u(s; x), u'(t; x)-u'(s; x)]_-\\&\qquad+[u(t; x)-u(s; x), u'(s; x)]_+\\&\leqslant\|u'(s; x)\|\\&\leqslant|Au(s; x)|.\end{aligned} \tag{6.4.9}$$

所以

$$\|u(t; x)-u(s; x)\|\leqslant|Au(s; x)|(t-s), \quad t\geqslant s.$$

此式表明：对几乎一切$t>0$，$\|u_t'(t; x)\|=|Au(t; x)|$.

仿 (6.4.8) 和 (6.4.9) 两式之证明方法分别可以证得

$$\|u(t+h; x)-u(t; x)\| \leqslant \|u(h; x)-x\|, \forall t \geqslant 0, h>0,$$

$$\|u(h; x)-x\| \leqslant h|Ax|, \quad \forall h>0, \qquad (6.4.10)$$

从而$\|u_t'(t; x)\| \leqslant |Ax|$.（ii）获证.由（6.4.10）式知（iii）成立.

结论（i）表明初值问题（6.4.1）的解唯一.因此，若令$T(t)x=u(t; x)$，则显然$T(t)x$关于t连续,关于x非扩展，从而对任给$t \geqslant 0$，$T(t)$ 可以保持非扩展性由$D(A)$ 延拓到 $\overline{D(A)}$上（延拓后仍记为$T(t)$）.由解$u(t; x)$ 的存在唯一性即可知$T(s+T)=T(s)T(t)$.结论(iv)获证. □

对$\lambda>0$，令$J_\lambda=(I-\lambda A)^{-1}$，$A_\lambda=\lambda^{-1}(J_\lambda-I)$.在考察初值问题（6.4.1）的同时，我们考察

$$\begin{cases} \dfrac{du_\lambda}{dt}=A_\lambda u_\lambda, \quad t \geqslant 0 \\ u_\lambda(0)=x \end{cases} \qquad (6.4.11)$$

定理6.4.1 设$A: E \to 2^E$是耗散算子,并且

$$\bigcap_{\lambda>0} R(I-\lambda A) \supset \overline{co}\, A(D). \qquad (6.4.12)$$

则对任给 $x \in \overline{D(A)}$，下列结论成立:

（i）对一切$\lambda>0$，初值问题（6.4.11）在$[0, +\infty)$上有唯一解$u_\lambda \in C^1[[0, +\infty), E]$;

（ii）$\lim\limits_{\lambda \to 0^+} u_\lambda(t)$ 存在，并且

$$\lim_{\lambda \to 0^+} u_\lambda(t)=T(t)x, \qquad (6.4.13)$$

其中$T(t)$ 由指数公式（6.3.2）确定；进一步，对一切$\tau>0$，极限（6.4.13）都对$t \in [0, \tau]$一致成立;

（iii）如果$x \in D(A)$，并且初值问题（6.4.1）有解 $u(t)$,

则

$$u(t)=\lim_{\lambda\to 0^+}u_\lambda(t). \tag{6.4.14}$$

证 把算子J_λ限制在$C=\overline{co}\,D(A)$上时，J_λ是映C入C的非扩展算子，从而根据引理6.4.1，方程

$$\begin{cases}\dfrac{dv_\lambda}{dt}=(J_\lambda-I)v_\lambda,\ t\geqslant 0,\\ v_\lambda(0)=x\end{cases} \tag{6.4.15}$$

在$[0,+\infty)$上具有唯一解$v_\lambda(t)$，并且

$$\|v_\lambda(n)-J_\lambda^n x\|\leqslant\sqrt{n}\,\|J_\lambda x-x\|=\sqrt{n}\,\lambda\|A_\lambda x\|.$$

显然$u_\lambda(t)=v_\lambda\left(\dfrac{t}{\lambda}\right)$就是方程（6.4.11）在$[0,+\infty)$上的唯一解，并且

$$\|u_\lambda(n\lambda)-J_\lambda^n x\|\leqslant\sqrt{n}\,\lambda\|A_\lambda x\|,\ n=0,1,2,\cdots. \tag{6.4.16}$$

（i）获证.下证（ii）.先设$x\in D(A)$.设$t\geqslant 0$，$\lambda>0$，取非负整数n及$0\leqslant\mu\leqslant\lambda$，使$t=n\lambda+\mu$.因为$A_\lambda$也是耗散算子，故由引理6.4.2(ii)，有

$$\left\|\frac{du_\lambda(t)}{dt}\right\|\leqslant\|A_\lambda x\|,\ t\geqslant 0,$$

从而

$$\|u_\lambda(t)-u_\lambda(n\lambda)\|\leqslant\mu\|A_\lambda x\|. \tag{6.4.17}$$

在（6.3.3）式中分别把m，λ，n，μ换成n,λ，m，$\dfrac{n\lambda}{m}$，并令$m\to\infty$，可知必有

$$\|J_\lambda^n x-T(n\lambda)x\|\leqslant\lambda\sqrt{n}\,|Ax|. \tag{6.4.18}$$

由（6.3.5）式可知

$$\|T(n\lambda)x-T(t)x\|\leqslant\mu|Ax|. \tag{6.4.19}$$

由定理6.2.2（iv）知$\|A_\lambda x\|\leqslant|Ax|$，所以由(6.4.16)、(6.4.17)、(6.4.18)和(6.4.19)四式可知

$$\|u_\lambda(t)-T(t)x\|\leqslant(2\lambda+2\sqrt{\lambda t})|Ax|.$$

由此式即知结论（ii）对$x\in D(A)$成立.由$u_\lambda(t)$和$T(t)$在$\overline{D(A)}$上都是非扩展的，故可知结论（ii）对$x\in\overline{D(A)}$成立.

下证（iii）.设$u(t)$是初值问题（6.4.1）的解，并把它延拓到$t<0$.仿引理6.4.2（i）之证明可得

$$\|u(t)-u(t-h)\|\leqslant\|u(h)-x\|.$$

对$\varepsilon>0$，定义

$$y_\varepsilon(t)=\frac{du(t)}{dt}-\frac{u(t)-u(t-\varepsilon)}{\varepsilon},$$

则由引理6.4.2之结论（ii）、（iii）可知对几乎一切$t\geqslant0$，

$$\|y_\varepsilon(t)\|\leqslant2|Ax|. \tag{6.4.20}$$

由$y_\varepsilon(t)$的定义易知

$$u(t)=(I-\varepsilon A)^{-1}[u(t-\varepsilon)-\varepsilon y_\varepsilon(t)] \tag{6.4.21}$$

定义

$$u_\varepsilon(t)=(I-\varepsilon A)^{-j}x,\ (j-1)\varepsilon\leqslant t\leqslant j\varepsilon、j=1,2,\cdots,$$

则显然有

$$u_\varepsilon(t)=(I-\varepsilon A)^{-1}u_\varepsilon(t-\varepsilon),\ \varepsilon\leqslant t<+\infty.$$

于是由$(I-\varepsilon A)^{-1}$的非扩展性和(6.4.21)式可知

$$\|u(t)-u_\varepsilon(t)\|\leqslant\varepsilon\|y_\varepsilon(t)\|+\|u(t-\varepsilon)-u_\varepsilon(t-\varepsilon)\|.$$

对$\tau>\varepsilon$，在$[\varepsilon,\tau]$上对上式关于t积分，得

$$\varepsilon^{-1}\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau}\|u(t)-u_\varepsilon(t)\|dt$$

$$\leqslant\int_\varepsilon^\tau\|y_\varepsilon(t)\|dt+\varepsilon^{-1}\int_0^\varepsilon\|u(t)-u_\varepsilon(t)\|dt$$

注意到在$[0, \varepsilon]$上$u_\varepsilon(t)=(I-\varepsilon A)^{-1}x=J_\varepsilon x$，故由引理6.2.2（iv）和引理6.4.2（iii）可知当$0\leqslant t\leqslant\varepsilon$时

$$\|u(t)-u_\varepsilon(t)\|\leqslant\|J_\varepsilon x-u(t)\|\leqslant\|J_\varepsilon x-x\|+\|x-u(t)\|$$
$$\leqslant 2\varepsilon|Ax|.$$

所以

$$\varepsilon^{-1}\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau}\|u(t)-u_\varepsilon(t)\|dt$$
$$\leqslant\int_0^{\tau}\|y_\varepsilon(t)\|dt+2\varepsilon|Ax|. \tag{6.4.22}$$

在（6.4.22）式中，取$\varepsilon=\frac{\tau}{n}$，并注意到$u_\varepsilon(t)=\left(I-\frac{\tau}{n}A\right)^{-n}x$ $(\tau-\varepsilon\leqslant t\leqslant\tau)$，故

$$\frac{n}{\tau}\int_{\left(1-\frac{1}{n}\right)\tau}^{\tau}\left\|u(t)-\left(I-\frac{\tau}{n}A\right)^{-n}x\right\|dt$$
$$\leqslant\int_0^{\tau}\left\|y_\varepsilon(t)\right\|dt+\frac{2\tau}{n}|Ax| \tag{6.4.23}$$

因为$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}y_\varepsilon(t)=0$对几乎一切$t\in(0, \tau)$成立，并注意到(6.4.20）式，有$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\tau}\|y_\varepsilon(t)\|dt=0$.在（6.4.23）式中令$n\to\infty$，即得

$$u(t)=\lim_{n\to\infty}\left(I-\frac{t}{n}A\right)^{-n}x. \tag{6.4.24}$$

证完.□

定理6.4.1表明，如果初值问题（6.4.1）有解，那么这个解可以用公式（6.4.24）表达.下面我们寻求初值问题(6.4.1)有解的条件.

定理6.4.2 设A: $E\to 2^E$是闭的耗散算子，满足(6.4.12)

式. 设$x\in\overline{D(A)}$，$T(t)x$由指数公式（6.3.2）定义.如果$T(t)x$关于t在（0，$+\infty$）上几乎处处可微，则$u(t)=T(t)x$是初值问题（6.4.1）的解.

为了证明这一定理，先给出下列引理:

引理6.4.3 设定理6.4.2的条件满足.设$x_0\in\overline{D(A)}$，并且$x\in D(A)$，$y\in Ax$，则

$$\overline{\lim_{t\to 0}}\left(x_0-x,\ \frac{1}{t}(T(t)x_0-x_0)\right)_+$$

$$\leqslant(x_0-x,\ y)_+. \tag{6.4.25}$$

证 对每个$\lambda>0$，考虑具有初值的$u_\lambda(0)=x_0$的方程（6.4.11）的解u_λ. 设$x\in D(A)$，$y\in Ax$，$x_\lambda=x-\lambda y$. 显然$x=J_\lambda x_\lambda$，$y=A_\lambda x_\lambda$，

$$\frac{d}{dt}(u_\lambda(t)-x_\lambda)=A_\lambda u_\lambda(t),\ t\geqslant 0.$$

令$n(t)=\|u_\lambda(t)-x_\lambda\|^2$，则由定理1.3.2

$$\frac{1}{2}n_-'(t)\leqslant(u_\lambda(t)-x_\lambda,\ A_\lambda u_\lambda(t))_-$$

$$\leqslant(u_\lambda(t)-x_\lambda,\ A_\lambda x_\lambda)_+$$

从而

$$\frac{1}{2}[n(t)-n(0)]$$

$$\leqslant\int_0^t(u_\lambda(\tau)-x_\lambda,\ A_\lambda x_\lambda)_+d\tau. \tag{6.4.26}$$

因为$\lim\limits_{\lambda\to 0^+}u_\lambda(t)=T(t)x_0$，$\lim\limits_{\lambda\to 0^+}x_\lambda=x$，且$(\cdot,\ \cdot)_+$是上半连续的，所以由（6.4.26）式可知

$$\frac{1}{2}(\|T(t)x_0-x\|^2-\|x_0-x\|^2)$$

$$\leqslant\int_0^t(T(\tau)x_0-x,\ y)_+d\tau.$$

由（·，·）$_+$的定义和性质容易证明对任给$x,u,v\in E$，有

$$(x-v,\ u-x)_+\leqslant\frac{1}{2}[\|u-v\|^2-\|x-v\|^2],$$

所以

$$(x_0-x,T(t)x_0-x_0)_+$$

$$\leqslant\frac{1}{2}[\|T(t)x_0-x\|^2-\|x_0-x\|^2]$$

$$\leqslant\int_0^t(T(\tau)x_0-x,y)_+d\tau.$$

由此式并注意到（·，·）$_+$的上半连续性，即可知（6.4.25）式成立.□

定理6.4.2的证明 设$x\in\overline{D(A)}$。设$t_0>0$，使得$\frac{d}{dt}T(t)x$在$t=t_0$处存在.我们仅需证明

$$\frac{d}{dt}T(t_0)x\in AT(t_0)x. \tag{6.4.27}$$

对$0<h<t_0$，我们可以把$T(t_0-h)x$写成

$$T(t_0-h)x=T(t_0)x-h\frac{d}{dt}T(t_0)x+g(h),$$

其中$g(h)$满足$\lim\limits_{h\to0}\frac{\|g(h)\|}{h}=0$.因为$T(t_0-h)x\in\overline{D(A)}$，故由条件（6.4.12）式知必存在$x_h\in D(A)$，$y_h\in Ax_h$，使得

$$T(t_0-h)x=x_h-hy_h,$$

所以

$$T(t_0)x-x_h$$

$$=h\left(\frac{d}{dt}T(t_0)x-y_h\right)-g(h) \tag{6.4.28}$$

在（6.4.25）式中，令$x=x_h$，$y=y_h$，$x_0=T(t_0)x$，得知

$$\left(T(t_0)x-x_h,\ \frac{d}{dt}T(t_0)x\right)_+$$

$$\leqslant(T(t_0)x-x_h,\ y_h)_+. \tag{6.4.29}$$

因此，必存在$f_h\in J(T(t_0)x-x_h)$（这里J是正规对偶映射），使

$$f_h\left(\frac{d}{dt}T(t_0)x-y_h\right)\leqslant 0.$$

根据正规对偶映射的性质，

$$\|T(t_0)x-x_h\|^2=f_h(T(t_0)x-x_h)$$

$$=h\cdot f_h\left(\frac{d}{dt}T(t_0)x-y_h\right)-f_h(g(h))$$

$$\leqslant -f_h(g(h))\leqslant\|f_h\|\|g(h)\|$$

$$=\|T(t_0)x-x_h\|\|g(h)\|.$$

从而$\|T(t_0)x-x_h\|\leqslant\|g(h)\|$。令$h\to 0$，得

$$\lim_{h\to 0}x_h=T(t_0)x,$$

从而由（6.4.28）式可知

$$\lim_{h\to 0}y_h=\frac{d}{dt}T(t_0)x.$$

注意到$x_h\in D(A)$，$y_h\in Ax_h$，A是闭算子，故（6.4.27）式成

立. □

由定理6.4.1和定理6.4.2可知，在定理6.4.2的条件下，初值问题（6.4.1）的解是唯一的.

引理6.4.4 设E是自反空间，$x(t)$：$[a, b]\to E$是一个函数. 设$x(t)$在$[a, b]$上满足Lipschtz条件，则$x(t)$是几乎处处可微的.

这一引理的证明见Komura〔1〕.

系6.4.1 设E是自反空间，$A: E\to 2^E$是闭的耗散算子，满足（6.4.12）式，则对每一个$x\in\overline{D(A)}$，初值问题（6.4.1）都在$[0, +\infty)$上存在唯一解$u(t; x)$，并且

$$u(t; x)=\lim_{n\to\infty}\left(I-\frac{t}{n}A\right)^{-n}x, \quad t\geqslant 0.$$

证 由定理6.3.1证明中的（6.3.5）式知对固定的$x\in D(A)$，$T(t)x$关于t满足Lipschtz条件. 根据引理9.4.4，$T(t)x$是几乎处处可微的. 根据定理6.4.2即知系的结论成立. □

6.5 拟自治微分方程

在本节中我们讨论拟自治的Banach空间常微分方程初值问题.

$$\begin{cases}\dfrac{du(t)}{dt}\in Au(t)+f(t), & 0\leqslant t\leqslant\tau,\\ u(0)=u_0.\end{cases} \tag{6.5.1}$$

本节将假定$A: E\to 2^E$是耗散算子，$f(t)\in L_1([0, \tau]; E)$，即$f: [0, \tau]\to E$是强可测函数（参见Dunford和Schwartz〔1〕），

$$\|f(t)\|\in L_1[0,\tau]. \tag{6.5.2}$$

定义6.5.1 函数$u(t):[0,\tau]\to E$称为是初值问题(6.5.1)的积分解，如果$u(t)$在$[0,\tau]$上连续，$u(0)=u_0$，并且对任给$x\in D(A)$，$y\in Ax$，$0\leqslant s\leqslant t\leqslant\tau$，有

$$\frac{1}{2}\|u(t)-x\|^2\leqslant\frac{1}{2}\|u(s)-x\|^2$$

$$+\int_s^t (u(r)-x,\ f(r)+y)_+dr. \tag{6.5.3}$$

显然每一强解都是积分解．此外，若A是闭的耗散算子，满足（6.4.12）式，则由定理6.4.1提供的

$$u(t)=T(t)x=\lim_{n\to\infty}\left(I-\frac{t}{n}A\right)^{-n}x \tag{6.5.4}$$

是自治方程（6.4.1）的积分解（这不难从引理6.4.3的证明看出）．

关于积分解的存在性，我们有

定理6.5.1 设E是Banach空间，P是E中的锥，$A:E\to 2^E$是闭的耗散算子，使得

$$D(A)\subset P\subset R(I-\lambda A),\ \forall\lambda>0. \tag{6.5.5}$$

又设$u_0\in\overline{D(A)}$，$f\in L_1([0,\tau];E)$，并且对几乎一切$t\in(0,\tau)$，$f(t)\in P$．对任给$\lambda>0$，设$u_\lambda(t)$是初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{du_\lambda(t)}{dt}=A_\lambda u_\lambda+f(t) & \text{对几乎一切}t\in(0,\tau),\\ u_\lambda(0)=u_0\end{cases} \tag{6.5.6}$$

的解．则极限$u(t)=\lim\limits_{\lambda\to0^+}u_\lambda(t)$存在，关于$t\in[0,\tau]$一致成立，并且$u(t)$是初值问题（6.5.1）的积分解．

证 首先假定在$[0,\tau]$上$f(t)\equiv y_0\in P$．令$\widetilde{A}u=Au+y_0$，

则$\widetilde{A}$也是闭的耗散算子. 由（6.5.5）式可知$P\subset R(I-\lambda A_1)$（$\forall\lambda>0$），并且$\widetilde{A}_\lambda u=A_\lambda(u+\lambda y_0)+y_0(\forall u\in P)$. 考察初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dv_\lambda}{dt}=\widetilde{A}_\lambda v_\lambda, \quad 0\leqslant t\leqslant\tau \\ v_\lambda(0)=u_0\end{cases} \tag{6.5.7}$$

设$\widetilde{T}$是由$\widetilde{A}$生成的非线性压缩半群. 根据定理6.4.1，初值问题（6.5.7）存在唯一解$v_\lambda(t)$，并且

$$u(t)=\lim_{\lambda\to 0} v_\lambda(t) = \widetilde{T}(t)u_0$$

是初值问题（6.5.1）的积分解（其中$f(t)\equiv y_0$）. 设$u_\lambda(t)$是初值问题（6.5.6）当$f(t)\equiv y_0$时的（唯一）解，则

$$\frac{d}{dt}(u_\lambda(t)-v_\lambda(t))=A_\lambda u_\lambda(t)-A_\lambda(v_\lambda(t)+\lambda y_0)$$

对几乎一切$t\in(0,\tau)$成立. 令$m(t)=\|u_\lambda(t)-v_\lambda(t)-\lambda y_0\|$，注意到$A_\lambda$也是耗散算子，故对几乎一切$t\in(0,\tau)$，

$$m_-'(t)=[u_\lambda(t)-v_\lambda(t)-\lambda y_0,$$
$$A_\lambda u_\lambda(t)-A_\lambda(v_\lambda(t)+\lambda y_0)]_-\leqslant 0.$$

所以

$$\|u_\lambda(t)-v_\lambda(t)-\lambda y_0\|\leqslant\|u_\lambda(0)-v_\lambda(0)-\lambda y_0\|=\|\lambda y_0\|$$

令$\lambda\to 0$，即知$u(t)=\lim\limits_{\lambda\to 0}u_\lambda(t)$存在，并关于$t\in[0,\tau]$是一致的.

其次假定$f(t)$是$[0,\tau]$上的阶梯函数，即

$$f(t)=y_i, \quad t_{i-1}\leqslant t<t_i, \quad i=1,2,\cdots,n,$$

其中$t_0=0$，$t_n=\tau$，$y_i\in P(i=1,2,\cdots,n)$. 显然初值问题（6.5.6）的解u_λ可以表为

$$u_\lambda(t)=u_\lambda^i(t-t_{i-1}), \quad t_{i-1}\leqslant t\leqslant t_i, \quad i=1,2,\cdots,n$$

其中$u_\lambda^i(t)$是

$$\begin{cases}\dfrac{du_\lambda^i}{dt}=A_\lambda u_\lambda^i+y_i, & 0\leqslant t\leqslant t_i-t_{i-1}\\ u_\lambda^i(0)=u_\lambda(t_{i-1})\end{cases}$$

$(i=1,2,\cdots,n)$．根据第一大段证明的结论，极限

$$\lim_{\lambda\to 0}u_\lambda(t)=u(t)$$

在每个$[t_{i-1},t_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$上一致存在，从而在$[0,\tau]$上一致存在，并且$u(t)$在每一个$[t_{i-1},t_i]$上是初值问题（6.5.1）的积分解，从而在$[0,\tau]$上也是初值问题（6.5.1）的积分解。

最后，设$f(t)$满足（6.5.2）式，并且对几乎一切$t\in[0,\tau]$，$f(t)\in P$。因此存在阶梯函数序列$\{f_n\}$，使得$f_n(t)\in P(\forall t\in[0,\tau])$，并且$\int_0^T\|f_n(t)-f(t)\|dt\to 0(n\to\infty$时）．设$u_\lambda^n$是初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{du_\lambda^n}{dt}=A_\lambda u_\lambda^n+f_n(t), & 0\leqslant t\leqslant\tau.\\ u_\lambda^n(0)=u_0\end{cases}$$

的解，u_λ是初值问题（6.5.6）的解．令$m(t)=\|u_\lambda(t)-{}_\lambda^n(ut)\|$，则由$A_\lambda$是耗散算子知

$$\begin{aligned}m_-'(t)&=[u_\lambda(t)-u_\lambda^n(t),\ A_\lambda u_\lambda+f(t)-(A_\lambda u_\lambda^n+f_n(t))]_-\\&\leqslant[u_\lambda(t)-u_\lambda^n(t),\ f(t)-f_n(t)]_-\\&\leqslant\|f(t)-f_n(t)\|,\end{aligned}$$

从而

$$\|u_\lambda(t)-u_\lambda^n(t)\|$$

$$\leqslant\int_0^\tau\|f(r)-f_n(r)\|dr,\ \forall t\in[0,\tau]. \tag{6.5.8}$$

由前一步证明可知对每一个 n，极限$\lim_{\lambda\to 0} u_\lambda^n$在 $[0, \tau]$ 上是一致存在的，于是，对任给$\varepsilon>0$，存在$\delta(\varepsilon)>0$，使当$0<\lambda<\delta(\varepsilon)$，$0<\mu<\delta(\varepsilon)$，$t\in[0, \tau]$时有

$$\|u_\lambda(t)-u_\mu(t)\|\leqslant\|u_\lambda(t)-u_\lambda^n(t)\|+\|u_\lambda^n(t)-u_\mu^n(t)\|$$
$$+\|u_\mu(t)-u_\mu^n(t)\|\leqslant\varepsilon.$$

故$u(t)=\lim_{\lambda\to 0} u_\lambda(t)$，对$t\in[0, \tau]$一致存在，因为$u_\lambda^n(t)\in\overline{D(A)}$（对几乎一切$t\in(0, \tau)$），故$u(t)\in\overline{D(A)}$（对几乎一切$t\in(0, \tau)$）。令$u^n(t)=\lim_{\lambda\to 0} u_\lambda^n(t)$，则由前一步证明知对每一个$n$，$u^n(t)$是问题（6.5.1）的积分解（取$f(t)=f_n(t)$），故对任给$x\in D(A)$，$y\in Ax$，$0\leqslant s\leqslant t\leqslant\tau$，有

$$\|u^n(t)-x\|^2$$
$$\leqslant\|u^n(s)-x\|^2+2\int_s^t(u^n(r)-x,y+f_n(r))_+dr. \qquad (6.5.9)$$

由（6.5.8）式可知$u^n(t)$在$[0, \tau]$上一致收敛于$u(t)$。故由(6.5.9）式和$(\cdot, \cdot)_+$的上半连续性，知（6.5.3）式成立，即$u(t)$ 是初值问题（6.5.1）的积分解.□

在考察初值问题（6.5.1）的同时，考察

$$\begin{cases}\dfrac{dv(t)}{dt}\in Av(t)+g(t)\\ v(0)=u_0\end{cases} \qquad (6.5.10)$$

定理6.5.2 设定理6.5.1的条件满足，$g\in L_1([0,\tau];E)$，$g(t)\in P$(对几乎一切$t\in[0, \tau]$).设$u(t)$如定理6.5.1所述,$v(t)$是初值问题(6.5.10)的任意一积分解.则对任给 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant\tau$,有

$$\|u(t)-v(t)\|^2\leqslant\|u(s)-v(s)\|^2$$
$$+2\int_s^t(u(r)-v(r),f(r)-g(r))_+dr. \qquad (6.5.11)$$

证 根据定理6.5.1，$u(t)$ 由$u(t)=\lim\limits_{\lambda\to 0}u_\lambda(t)$给出，并且这一极限对$t\in[0,\ \tau]$一致成立．设$v(t)$是初值问题（6.5.10）的任意一积分解，则对任给$x\in D(A)$，$y\in Ax$，$0\leqslant s\leqslant t\leqslant\tau$，有

$$\|v(t)-x\|^2$$

$$\leqslant\|v(s)-x\|^2+\ 2\int_s^t (v(r)-x,\ y+g(r))_+dr.$$

下面先设 $u_0\in D(A)$，$\dfrac{df(t)}{dt}$，$\dfrac{dg(t)}{dt}\in L_1([0,\ \tau];\ E)$．在上式中取$x=w_\lambda(\sigma)$（$0\leqslant\sigma\leqslant\tau$），其中$w_\lambda$由$w_\lambda(t)=(I-\lambda A)^{-1}u_\lambda(t)$定义，则可得对$0\leqslant s\leqslant t\leqslant\tau$，有

$$\frac{1}{2}\|v(t)-w_\lambda(\sigma)\|^2\leqslant\frac{1}{2}\|v(s)-w_\lambda(\sigma)\|^2+$$

$$\int_s^t (v(r)-w_\lambda(\sigma),\ \frac{du_\lambda(\sigma)}{d\sigma}+g(r)-f(\sigma))_+dr. \tag{6.5.12}$$

由w_λ的定义可知

$$w_\lambda(t)-u_\lambda(t)=\lambda A_\lambda u_\lambda(t)$$

$$=\lambda\Big(\frac{du_\lambda}{dt}-f(t)\Big) \tag{6.5.13}$$

下证$\lim\limits_{\lambda\to 0}\|u_\lambda(t)-w_\lambda(t)\|=0$关于$t\in[0,\tau]$一致成立．事实上，由于$u_\lambda(t)$是初值问题（6.5.6）的解，所以在$[0,\tau-h)$上几乎处处有

$$\frac{d}{dt}(u_\lambda(t+h)-u_\lambda(t))$$

$$=A_\lambda u_\lambda(t+h)-A_\lambda u_\lambda(t)+f(t+h)-f(t).$$

注意到A_λ是耗散算子，故仿（6.4.8）式之证明可得

$$\|u_\lambda(t+h)-u_\lambda(t)\|\leqslant\|u_\lambda(h)-u_\lambda(0)\|$$

$$+\int_0^h \|f(s+h)-f(s)\|ds. \qquad (6.5.14)$$

用同样的方法可以得到

$$\|u_\lambda(h)-u_\lambda(0)\|\leqslant h\|A_\lambda u_\lambda(0)\|+\int_0^h \|f(t)\|dt$$

$$\leqslant h\,|Au_0|+\int_0^h \|f(t)\|dt. \quad (6.5.15)$$

在（6.5.14）式两端除以h，令$h\to 0$，并利用（6.5.15）式，即得

$$\left\|\frac{du_\lambda(t)}{dt}\right\|\leqslant |Au_0|+\|f(0)\|+\int_0^\tau \left\|\frac{df(t)}{dt}\right\|dt.$$

再利用（6.5.13）式即知$\lim\limits_{\lambda\to 0}\|u_\lambda(t)-w_\lambda(t)\|=0$关于$t\in[0,\tau]$一致成立。注意到$\frac{1}{2}\frac{d}{d\sigma}\|u_\lambda(\sigma)-v\|^2=\left(u_\lambda(\sigma)-v,\frac{du_\lambda(\sigma)}{d\sigma}\right)_+$，在（6.5.12）式两端在$[0,\tau]$的任一闭子区间$[\alpha,\beta]$上积分，并令$\lambda\to 0$，即可得。

$$\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \|u(\sigma)-v(t)\|^2 d\sigma\leqslant\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \|u(\sigma)-v(s)\|^2 d\sigma$$

$$+\overline{\lim_{\lambda\to 0}}\int_\alpha^\beta\int_s^t \left(v(r)-w_\lambda(\sigma),\ \frac{du_\lambda(\sigma)}{d\sigma}+g(r)\right.$$

$$\left.-f(\sigma)\right)_+ dr d\sigma$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \|u(\sigma)-v(s)\|^2 d\sigma+\int_\alpha^\beta d\sigma\int_s^t (u(\sigma)-v(r),$$

$$f(\sigma)-g(r))_+ dr+\frac{1}{2}\int_s^t \|u(\alpha)-v(r)\|^2 dr$$

$$-\frac{1}{2}\int_s^t \|u(\beta)-v(r)\|^2 dr,$$

$$\forall 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \tau, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \tau. \tag{6.5.16}$$

定义

$$\varphi(\sigma, r) = \frac{1}{2}\|u(\sigma) - v(r)\|^2, \quad \sigma, r \in [0, \tau],$$

$$\psi(\sigma, r) = (u(\sigma) - v(r), f(\sigma) - g(r))_+, \sigma, r \in [0, \tau];$$

$$\varphi_n(t, s) = \int_0^\tau \int_0^\tau \rho_n(t-\sigma, s-r)\varphi(\sigma, r) dr d\sigma,$$

$$\psi_n(t, s) = \int_0^\tau \int_0^\tau \rho_n(t-\sigma, s-r)\psi(\sigma, r) dr d\sigma,$$

其中$\rho_n(t, s) = n^2\rho(nt)\rho(ns)$，$\rho$是$R^1$上的无穷次可微函数，$\rho(t) \geqslant 0$，$\rho(t) = \rho(-t)$ $(\forall t \in R^1)$，$\int_{R^1}\rho(t)dt = 1$，并且ρ的支集$\overline{\{t \in R^1 \mid \rho(t) \neq 0\}} \subset [-1, 1]$。在（6.5.16）式中，取$\frac{1}{n} \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \tau$，$\frac{1}{n} \leqslant s \leqslant T \leqslant \tau$，则可以得到

$$\int_\alpha^\beta [\varphi_n(\sigma, t) - \varphi_n(\sigma, s)] d\sigma$$

$$+ \int_s^t [\varphi_n(\beta, r) - \varphi_n(\alpha, r)] dr$$

$$\leqslant \int_\alpha^\beta d\sigma \int_s^t \psi_n(\sigma, r) dr,$$

因此对$\frac{1}{n} \leqslant \sigma \leqslant \tau$，$\frac{1}{n} \leqslant r \leqslant \tau$，有

$$\frac{\partial \varphi_n(\sigma, r)}{\partial r} + \frac{\partial \varphi_n(\sigma, r)}{\partial \sigma} \leqslant \psi_n(\sigma, r)$$

于是

$$\varphi_n(t, t) \leqslant \varphi_n(s, s) + \int_s^t \psi_n(r, r) dr, \quad \frac{1}{n} \leqslant s \leqslant t \leqslant \tau.$$

令$n \to \infty$，即可

$$\varphi(t,\ t)\leqslant\varphi(s,\ s)+\int_s^t\psi(r,\ r)dr,\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant\tau,$$

于是，对$0\leqslant s\leqslant t\leqslant\tau$，（6.5.11）式成立。

再设$u_0\in\overline{D(A)}$，f，$g\in L_1([0,\ \tau];\ E)$。取$\{u_{n,0}\}\subset D(A)$，使在E中$u_{n,0}\to u_0$。取f_n，g_n $(n=1,2,\cdots)$，使得$\frac{df_n}{dt}\in L_1([0,\ \tau];\ E)$，$\frac{dg_n}{dt}\in L_1([0,\ \tau];\ E)$，并且在$L_1([0,\ \tau];\ E)$中$f_n\to f$，$g_n\in g$。设$u_n$和$v_n$分别是初值问题（6.5.1）和初值问题（6.5.10）（分别把其中的$f(t)$和$g(t)$换成$f_n(t)$和$g_n(t)$，u_0换成$u_{n,0}$）的积分解，则有

$$\|u_n(t)-v_n(t)\|^2\leqslant\|u_n(s)-v_n(s)\|^2$$
$$+2\int_s^t(u_n(r)-v_n(r),\ f_n(r)-g_n(r))_+dr,$$
$$\forall\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant\tau. \tag{6.5.17}$$

不失一般可设对几乎一切$t\in(0,\ \tau)$，$u_n(t)\to u(t)$，$v_n(t)\to v(t)$。在（6.5.17）式中令$n\to\infty$，可知对几乎一切$0\leqslant s\leqslant t\leqslant\tau$，（6.5.11）式成立。因为$u(t)$和$v(t)$是连续的。故（6.5.11）式对一切$0\leqslant s\leqslant t\leqslant\tau$成立。□

由定理6.5.1和定理6.5.2立即可知下列结论成立：

定理6.5.3 在定理6.5.1的条件下，初值问题（6.5.1）的积分解唯一存在。

下面讨论在什么条件下，定理6.5.1中的积分解是强解，即$u(t)$在$[0,\ \tau]$上连续，在$(0,\tau)$的每一紧区间上满足Lipschitz条件，在$(0,\ \tau)$上几乎处处可微，$u(0)=u_0$，并且对几乎一切$0<t<\tau$，$u(t)\in D(A)$，$u'(t)\in Au(t)+f(t)$。

定理6.5.4 设E是自反的Banach空间，P是E中的锥，$A: E\to 2^E$是闭的耗散算子，使得（6.5.5）式成立。设$u_0\in$

$D(A)$，f 满足$\frac{df(t)}{dt}\in L_1([0, \tau]; E)$，并且对几乎一切$t\in(0, \tau)$，$f(t)\in P$。则定理6.5.1中的积分解是强解，并且该强解是唯一的。

证 在(6.5.3)式中，令$x=u_0$，$y\in Au_0$，$s=0$，$t=h$，得

$$\frac{1}{2}\|u(h)-u_0\|^2\leqslant\int_0^h\|u(r)-u_0\|\|f(r)+y\|dr,$$
$$\forall 0\leqslant h\leqslant\tau.$$

解此积分不等式得

$$\|u(h)-u_0\|\leqslant\int_0^h|f(s)+Au_0|ds,$$
$$\forall 0\leqslant h\leqslant\tau, \qquad (6.5.18)$$

其中$|f(s)+Au_0|=\inf\{\|f+y\| \mid y\in Au_0\}$.类似地，在(6.5.11)式中，把$v(t)$和$u(t)$分别换成$u(t)$和$u(t+h)$，并令$s=0$，可得

$$\frac{1}{2}\|u(t+h)-u(t)\|^2\leqslant\frac{1}{2}\|u(h)-u(0)\|^2$$
$$+\int_0^t\|f(r+h)-f(r)\|\|u(h+r)-u(r)\|dr.$$

解此积分不等式，并利用（6.5.18）式，得

$$\|u(t+h)-u(t)\|\leqslant\int_0^h|f(s)+Au_0|ds$$
$$+\int_0^t\|f(s+h)-f(s)\|ds. \qquad (6.5.19)$$

注意到$\frac{df(t)}{dt}\in L_1([0, \tau]; E)$，故由（6.5.19）式知$u(t)$在$(0, \tau)$上满足Lipschitz条件。由于$E$是自反空间，故根据引理6.4.4，$u(t)$在$[0, \tau]$上几乎处处可微。

设$t_0>0$，使$u(t)$在$t=t_0$处可微，并且$f(t_0)\in P$.对$0<h<t_0$，我们可以把$u(t_0-h)$表为

$$u(t_0-h)=u(t_0)-h\frac{d}{dt}u(t_0)+g(h), \qquad (6.5.20)$$

其中$g(h)$满足$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\|g(h)\|}{h}=0$．由假设知存在$x_h\in D(A)$，$y_h\in Ax_h$，使得

$$u_0(t_0-h)+hf(t_0)=x_h-hy_h. \qquad (6.5.21)$$

仿引理6.4.3及（6.4.29）式之证明，可得

$$\left(u(t_0)-x_h,\ \frac{d}{dt}u(t_0)\right)_+\leqslant(u(t_0)-x_h,\ f(t_0)+y_h)_+$$

所以必存在$f_h\in J(u(t_0)-x_h)$，使

$$f_h\left(\frac{d}{dt}u(t_0)-y_h-f(t_0)\right)\leqslant 0. \qquad (6.5.22)$$

由（6.5.20)、(6.5.21）和（6.5.22）三式得

$$f_h(u(t_0)-x_h+g(h))\leqslant 0.$$

由正规对偶映射的性质，

$$\|u(t_0)-x_n\|^2=f_n(u(t_0)-x_h)$$
$$=f_h(u(t_0)-x_h+g(h))-f_h(g(h))$$
$$\leqslant -f_h(g(h))\leqslant\|f_h\|\ \|g(h)\|=\|u(t_0-x_h\|\ \|g(h)\|.$$

从而$\|u(t_0)-x_h\|\leqslant\|g(h)\|$．这表明$x_h\to u(t_0)$．由（6.5.20）和（6.5.21）两式得

$$u(t_0)-x_h=h\left(\frac{d}{dt}u(t_0)-y_h-f(t_0)\right)-g(h)$$

从而$y_h\to\dfrac{d}{dt}u(t_0)-f(t_0)$．注意到$x_h\in D(A)$，$y_h\in Ax_h$，$A$是闭算子，故对几乎一切$t_0\in(0,\ \tau)$，有

$$\frac{d}{dt}u(t_0)\in Au(t_0)+f(t_0).$$

所以$u(t)$是初值问题（6.5.1）的强解．由定理6.5.3知强解必

是唯一的.□

6.6 附 注

非线性压缩半群的研究，出现于与非线性耗散型算子相关联的微分方程解的存在性问题中. 这一研究最早是由Komura〔1〕中在Hilbert空间的情况下进行的. 定理6.1.1取自Martin〔1〕. 关于耗散算子的定理6.2.1和定理6.2.2见Lakshmikantham和Leela〔2〕.

指数公式（即定理6.3.1）是在Crandall和Ligget〔1〕中建立的，它推广了Komura〔1〕中的结果. 这一结果揭示了非线性压缩半群与耗散算子之间的本质联系，为Banach常微分方程的研究提供了一个有力的工具.

6.4节中关于含耗散项的自治微分方程的几个主要结果选自Barbu〔1〕，关于这些结果及其进一步的讨论还可见Crandall和Ligget〔1〕，Brezis和Pazy〔1〕.

拟自治的微分方程的积分解，是由Benilan和Brezis〔1〕中引入并加以研究的. 定理6.5.1～定理6.5.4是Benilan〔1〕〔2〕中证明的. 包含非定常情况的更一般的结果可在Crandall和Pazy〔1〕中找到.

与本章内容有关的讨论还可以见Lakshmikantham和Leela〔2〕.

关于非线性半群及其在Banach空间常微分方程理论的应用方面，已经有了相当广泛的讨论. 关于这一课题的完整的叙述可以见Barbu的专著〔1〕.

第七章　解的全局性质

在本章中，我们将讨论Banach空间常微分方程解的全局性质，其中包括全局存在性定理，解的渐近均衡性，稳定性和同等有界性，此外，在最后一节，我们将讨论解集的全局结构。

7.1　全局存在性定理

本节首先讨论Banach空间常微分方程初值问题

$$x'=f(t,\ x),\ x(t_0)=x_0 \qquad (7.1.1)$$

解的全局存在性，本节使用下列假设：

H^*：$f(t,\ x)\in C[R_+\times E,\ E]$，并且对任给$(t_0,\ x_0)\in R_+\times E$，初值问题(7.1.1)都存在局部解，即存在$\beta_0=\beta_0(t_0,x_0)>0$及$[t_0,t_0+\beta_0]$上的可微函数$x(t)$，使当$t\in[t_0,\ t_0+\beta_0]$时$x(t)$满足(7.1.1)。

定理7.1.1　设假设H^*满足。设

$$\|f(t,\ x)\|\leqslant g(t,\ \|x\|),\ (t,\ x)\in R_+\times E, \qquad (7.1.2)$$

其中$g\in C[R_+\times R_+,\ R_+]$，对固定的$t\in R_+$，$g\ (t,\ u)$关于$u$是增函数，并且

$$u'=g(t,\ u),\quad u(t_0)=u_0>0 \qquad (7.1.3)$$

的最大解$r(t,t_0,\ u_0)$在$[t_0,\ +\infty]$上存在，则当$\|x_0\|\leqslant u_0$时初值问题(7.1.1)任意一解$x(t,\ t_0,\ x_0)$的最大存在区间都是$[t_0,\ +\infty)$。进一步，若$r(t,\ t_0,x_0)$在$[t_0,\ +\infty]$上有界，则存在

$y\in E$，使$\lim\limits_{t\to\infty}x(t, t_0, x_0)=y$.

证 设$x(t, t_0, x_0)$是初值问题(7.1.1)的任意一解($\|x_0\|\leqslant u_0$)，它的最大存在区间是$[t_0, \beta)$，$\beta<+\infty$. 令$m(t)=\|x(t, t_0, x_0)\|$，则$m(t_0)=\|x_0\|\leqslant u_0$，

$$D^+m(t)\leqslant\|x'(t, t_0, x_0)\|=\|f(t,x(t,t_0,x_0))\|$$
$$\leqslant g(t, m(t)),\ t_0\leqslant t<\beta.$$

根据定理1.2.6，

$$\|x(t, t_0, x_0)\|\leqslant r(t, t_0, x_0), t_0\leqslant t<\beta \tag{7.1.4}$$

对任给$t_0\leqslant t_1<t_2<\beta$，由(7.1.4)式及$g(t,u)$的增性，有

$$\|x(t_1,t_0,x_0)-x(t_2,t_0,x_0)\|=\left\|\int_{t_1}^{t_2}f(s,x(s,t_0,x_0))ds\right\|$$

$$\leqslant\int_{t_1}^{t_2}g(s,\|x(s,t_0,x_0)\|)\,ds\leqslant\int_{t_1}^{t_2}g(s,r(s,t_0,u_0))ds$$
$$=r(t_2,t_0,u_0)-r(t_1,t_0,u_0). \tag{7.1.5}$$

因为$\lim\limits_{t\to\beta^-}r(t,t_0,u_0)$存在有限，故根据Cauchy收敛原则知$\lim\limits_{t\to\beta^-}x(t,t_0,x_0)$存在. 令$x(\beta,t_0,x_0)=\lim\limits_{t\to\beta^-}x(t,t_0,x_0)$. 并考察初值问题

$$x'=f(t, x),\ x(\beta)=x(\beta, t_0, x_0).$$

由假设H^*可知$x(t, t_0, x_0)$能够延拓到β的右方去，此与β的定义矛盾，所以$x(t, t_0, x_0)$的最大存在区间是$[t_0,+\infty)$.

因为$g(t,\|x\|)\geqslant 0$，故$r(t, t_0, u_0)$是t的增函数. 若$r(t, t_0, u_0)$有界，则$\lim\limits_{t\to+\infty}r(t, t_0, u_0)$存在. 再由(7.1.5)式（此时该式对$t_0\leqslant t_1<t_2<+\infty$都成立）即知$\lim\limits_{t\to\infty}x(t, t_0,x_0)$存在. □

定理7.1.2 设假设H^*满足，并且f在$R_+\times E$的有界集上是有界的. 又设存在$V\in C[R_+\times E, R_+]$，V关于x满足局部lipschitz条件，在任给$[0, T]\subset R_+$上

$$\lim_{\|x\|\to\infty} V(t,\ x) = +\infty \tag{7.1.6}$$

一致成立，并且

$$D^+V(t,x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[V(t+h, x+hf(t,x)) - V(t,x)]$$
$$\leqslant g(t,\ V(t,x)), \tag{7.1.7}$$

这里$g\in C[R_+\times R_+, R]$. 最后设初值问题（7.1.3）的最大解$r(t)=r(t,t_0,u_0)$在$[t_0,\ +\infty)$上存在且正，则对$x_0\in E, V(t_0, x_0)\leqslant u_0$，初值问题(7.1.1)存在解$x(t)$，它在$[t_0, +\infty)$上有定义，并且满足

$$V(t,\ x(t))\leqslant r(t),\ t\geqslant t_0. \tag{7.1.8}$$

证 令

$$S=\{x(t):[t_0,\ c_x)\to E\,|\,x(t)\text{是方程(7.1.1)的解，并且}$$
$$V(t,\ x(t))\leqslant r(t),\ \forall t\in[t_0,\ c_x)\}.$$

在S中定义半序关系如下：若$c_x\leqslant c_y$,并在$[t_0,c_x)$上$x(t)\equiv y(t)$，则记$x\leqslant y$. 下证S非空. 由假设H^*，初值问题(7.1.1)有定义在某区间$[t_0,c_x)$上的解$x(t)$. 令$m(t)=V(t,x(t))(t\in[t_0,c_x))$. 由(7.1.7)式得

$$D^+m(t)\leqslant g(t,\ m(t)),\ t\in[t_0,\ c_x).$$

从而由定理1.2.5知$m(t)\leqslant r(t)$。故S非空。容易验证在$(S,\leqslant)$中，任意全序子集必有上界，从而根据Zorn引理，S必有极大元。设$z(t)$是S的极大元，下证相应于$z(t)$的$c_z=+\infty$. 用反证法，设$c_z<+\infty$. 则$r(t)$在$[t_0,c_z]$上有界。因为对$t\in[t_0,c_z]$，一致有$\lim\limits_{\|x\|\to+\infty} V(t,x)=+\infty$，所以关系$V(t,z(t))\leqslant r(t)(t\in[t_0, c_z))$表明$\|z(t)\|$在$[t_0,\ c_z)$上有界，从而$f(t,\ z(t))$在$[t_0,\ c_z)$上有界. 设$M>0$，满足$\|f(t,\ z(t))\|\leqslant M(t\in[t_0,c_z))$，则对任给$t_0\leqslant t_1\leqslant t_2<c_z$，有

$$\|z(t_2)-z(t_1)\| \leqslant \int_{t_1}^{t_2} \|f(t,z(t))\|dt \leqslant M(t_2-t_1),$$

故极限$z_0=\lim\limits_{t\to c_z} z(t)$存在.考察初值问题

$$x'=f(t,\ x),\quad x(c_z)=z_0, \tag{7.1.9}$$

由假设H^*知初值问题(7.1.9)有定义在$[c_z,c_z+\delta)$上的解$x_0(t)$ $(\delta>0)$。定义

$$z_1(t)=\begin{cases} z(t),\ t_0\leqslant t<c_z, \\ x_0(t),\ c_z\leqslant t<c_z+\delta, \end{cases}$$

则$z_1(t)$是初值问题(7.1.1)定义在$[t_0,c_z+\delta)$上的解. 显然由(7.1.8)式容易证得$V(t,\ z_1(t))\leqslant r(t)(t\in[t_0,c_z+\delta))$。此与$z(t)$的极大性矛盾.证完.□

7.2 渐近均衡性

定义7.2.1 我们称方程(7.1.1)是渐近均衡的，如果它满足下列两个性质：

(i)对任给$(t_0,\ x_0)\in R_+\times E$，方程(7.1.1)的任何一个解$x(t)$都在$[t_0,\ +\infty)$上存在，并且极限$\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)$存在；

(ii)对任给$v\in E$，都存在方程(7.1.1)的定义在某一$[t_1,\ +\infty)$上的解$x(t)$，使得$\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)=v$。

本节将给出判定方程(7.1.1)是渐近均衡的条件. 我们首先注意到，定理7.1.1已经给出了方程(7.1.1)具有定义7.2.1中的性质(i)的条件。

定理7.2.2 设定理7.1.1的全部条件满足.则对任给$v\in E$，都存在$T>0$以及定义在$[T,\ +\infty)$上的函数列$\{x_n(t)\}$，使得

(i) $\{x_n(t)\}$在$[T, +\infty)$上是一致有界且等度连续的；

(ii) $x_n(t)$是方程$x'=f(t,x)$，$x(T+n)=v$的解。

证 任给$\lambda\in R_+$，令$r(t, t_0, \lambda)$是初值问题

$$u'=g(t, u), \ u(t_0)=\lambda \tag{7.2.1}$$

的最大解，它在$[t_0, +\infty)$上有定义，并且有界，因为$g(t,u)\geqslant 0$，故$r(t, t_0, \lambda)$关于t是增函数，所以极限$r(\infty, t_0, \lambda)=\lim\limits_{t\to+\infty}r(t, t_0, \lambda)$ 存在有限，并且

$$\lambda\leqslant r(t, t_0, \lambda)\leqslant r(\infty,t_0,\lambda), \quad t\in[t_0,+\infty) \tag{7.2.2}$$

于是，注意到$g((t,u)$关于u是增函数，可得

$$\int_{t_0}^{\infty}g(s,\lambda)ds\leqslant\int_{t_0}^{\infty}g(s, r(s, t_0, \lambda))ds$$

$$\leqslant r(\infty,t_0,\lambda)-\lambda<+\infty, \forall\lambda\in R_+. \tag{7.2.3}$$

在(7.2.3)式中取$\lambda=2r(\infty,t_0,\|v\|)$，可得，$\int_{t_0}^{\infty}g(s,2r(\infty,t_0,\|v\|)ds<+\infty$，其中，$r(\infty,t_0,\|v\|)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}r(t,t_0,\|v\|)$，$r(t,t_0,\|v\|)$是$u'=g(t,u)$，$u(t_0)=\|v\|$的最大解，因此，必存在$T\geqslant t_0$，使得

$$\int_{T}^{\infty}g(s,2r(\infty,t_0,\|v\|)ds<r(\infty,t_0,\|v\|). \tag{7.2.4}$$

对每个自然数n，由定理7.1.1可知，初值问题

$$x'=f(t, x), \ x(T+n)=v$$

必存在在$[T+n, +\infty)$上有定义的解$x_n(t)$，并且

$$\|x_n(t)\|\leqslant r_n(t, T+n,\|v\|), \ t\in[T+n,\infty), \tag{7.2.5}$$

其中$r_n(t,T+n, \|v\|)$是$u'=g(t,u)$，$u(T+n)=\|v\|$的最大解。注意到$\|r_n(T+n,T+n,\|v\|)\|=\|v\|=r(t_0,t_0\|v\|)\leqslant r(T+n,t_0,\|v\|)$，所以由(7.2.5)式及定理1.2.6可知

$$\|x_n(t)\|\leqslant r(t,t_0,\|v\|)\leqslant r(\infty,t_0,\|v\|), t\in[T+n,\infty). \tag{7.2.6}$$

设$u_n(t,T+n,\|v\|)$是$u'=-g(t,u),u(T+n)=\|v\|$的向左延伸的解。下证$u_n(t,T+n,\|v\|)$（下记为$u_n(t)$）在$[T,T+n]$上有界。若不然，必存在t_1，$t_2\in[T,T+n]$，使$t_1<t_2$，$u_n(t_1)=2r(\infty,t_0,\|v\|)$，$u_n(t_2)=r(\infty,t_0,\|v\|)$，并且$u_n(t_1)\geqslant u_n(t)\geqslant u_n(t_2)$($t\in[t_1,t_2]$)。于是

$$r(\infty,t_0,\|v\|)=u_n(t_1)-u_n(t_2)=\left|\int_{t_1}^{t_2}-g(s,u_n(s,T+n,\|v\|)ds\right|$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}g(s,u_n(s,T+n,\|v\|)ds$$

$$\leqslant\int_{t_1}^{t_2}g(s,2r(\infty,t_0,\|v\|))ds$$

$$\leqslant\int_T^{\infty}g(s,2r(\infty,t_0,\|v\|))ds<r(\infty,t_0,\|v\|)$$

产生矛盾。上述证明表明初值问题$u'=-g(t,u),u(T+n)=\|v\|$的左行最大解$u_n(t,T+n,\|v\|)$在$[T,T+n]$上存在，有界，并且以$2r(\infty,t_0,\|v\|)$为界。根据定理7.1.1，$x_n(t)$必定在$[T,+\infty)$上有定义，并且

$$\|x_n(t)\|\leqslant 2r(\infty,t_0,\|v\|),\ t\in[T,+\infty),n=1,2,\cdots. \quad (7.2.7)$$

为了完成定理的证明，下面只需证明$\{x_n(t)\}$是等度连续的。任给$\varepsilon>0$，由(7.2.4)式知必存在$\tau\geqslant T$，使得$\int_{\tau}^{\infty}g(s,2r(\infty,t_0,\|v\|))ds<\varepsilon$。设$L>0$满足

$$g(t,u)\leqslant L,\ t\in[T,\tau+1],\ 0\leqslant u\leqslant 2r(\infty,t_0,\|v\|).$$

则当$|t_1-t_2|<\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{L}\right\}$时

$$\|x_n(t_1)-x_n(t_2)\|\leqslant\left\|\int_{t_1}^{t_2}f(s,x_n(s))ds\right\|$$

$$\leqslant \left|\int_{t_1}^{t_2} g(s,\|x_n(s)\|)\,ds\right| \leqslant \left|\int_{t_1}^{t_2} g(s,2r(\infty,t_0,\|v\|))ds\right| . \quad (7.2.8)$$

当t_1，$t_2\in[\tau, +\infty)$时，

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} g(s,2r(\infty,t_0,\|v\|))ds\right| \leqslant \left|\int_{\tau}^{\infty} g(s,2r(\infty,t_0,\|v\|))ds\right| < \varepsilon;$$

当t_1，$t_2\in[T,\tau+1]$时

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} g(s,2r(\infty,t_0,\|v\|))ds\right| \leqslant L|t_2-t_1| \leqslant \varepsilon.$$

故由(7.2.8)式可知$\|x_n(t_1)-x_n(t_2)\|\leqslant\varepsilon$.□

定理7.2.2 设定理7.2.1的全部条件满足，$v\in E$，$\{x_n(t)\}$如定理7.2.1所述．令$m(t)=\alpha(\{x_n(t)\})$，其中$\alpha(\cdot)$是非紧性测度，如果存在$t^*\geqslant T$，使得$m(t)\equiv 0\ (t\in[t^*,+\infty))$，则必存在初值问题(7.1.1)定义在$[t^*, +\infty)$上的解$x(t)$，满足$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=v$.

证 显然，在定理的条件下，必存在$\{x_n(t)\}$的子列（不失一般，可以假定就是$\{x_n(t)\}$本身）在$[t^*,+\infty)$上收敛于某$x(t)$，并且这种收敛在$[t^*, +\infty)$的任一紧子区间上是一致的．所以$x(t)$在$[t^*, +\infty)$上连续.对$t\in[t^*, \infty)$，有

$$x_n(t)=x_n(t^*)+\int_{t^*}^{t} f(s, x_n(s))ds.$$

令$n\to\infty$，得

$$x(t)=x(t^*)+\int_{t^*}^{t} f(s, x(s))ds.$$

所以$x(t)$是初值问题$x'=f(t, x)$．$x(t^*)=x(t^*)$，的解，下面仅需证明$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=v$．由（7.2.4）式可知必存在自然数$\tau>t^*$，

使$\int_{\tau}^{\infty} g(s,2r(\infty,t_0,\|v\|))ds<\frac{\varepsilon}{2}$。设$t_1\in[\tau,+\infty)$，则存在$N$，

使当$n\geqslant N$时$\|x_n(t_1)-x(t_1)\|<\frac{\varepsilon}{2}$.注意到$x_{N+\tau}(N+\tau+T)=v$，

所以

$$
\begin{aligned}
\|x(t_1)-v\| &= \|x(t_1)-x_{N+\tau}(N+\tau+T)\| \\
&\leqslant \|x(t_1)-x_{N+\tau}(t_1)\|+\|x_{N+\tau}(t_1)-x_{N+\tau}(N+\tau+T)\| \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\left\|\int_{t_1}^{N+\tau+T} f(s,\ x_{N+\tau}(s))\,ds\right\| \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\left|\int_{t_1}^{N+\tau+T} g(t_1\|x_{N+\tau}(s)\|)ds\right| \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\int_{\tau}^{\infty} g(s,2r(\infty,t_0,\|v\|))\,ds<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.
\end{aligned}
$$

即$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=v$。□

注意到定理7.1.1，可知定理7.2.2给出了判定一个方程是否是渐近均衡的方法，为了应用这一方法，我们需要检验是否存在$t^*\geqslant T$，使$m(t)\equiv 0\ (t\geqslant t^*)$.下面讨论这一问题，以下我们总假定定理7.2.1的条件满足，$\{x_n(t)\}$如定理7.2.1所述，$m(t)=\alpha(\{x_n(t)\})$,其中$\alpha(\cdot)$表示非紧性测度。

引理7.2.1 设(i)f在$R_+\times E$的任一有界集上是一致连续的；(ii)存在$t^*\in[T,+\infty)$，使得$m(t^*)=0$；(iii)对E中的任一有界集A和任给$h>0$，有

$$\alpha(\{x+hf(t,x)\mid x\in A\})-\alpha(A)\leqslant hG(t,\alpha(A)),\tag{7.2.9}$$

这里$G\in C[R_+\times R_+,R_+]$，使得$G(t,\ 0)\equiv 0$，并且$u'=G(t,u)$，$u(t^*)=0$只有零解。则在$[t^*,\ +\infty)$上$m(t)\equiv 0$。

证 令$t\in[t^*, +\infty)$，$h>0$，把$x_n(t+h)$表为

$$x_n(t+h)=x_n(t)+hf(t, x_n(t))+h\varepsilon_n(h),$$

的形式，则我们有

$$\frac{1}{h}[m(t+h)-m(t)]=\frac{1}{h}[\alpha(\{x_n(t+h)\})-\alpha(\{x_n(t)\})]$$

$$=\frac{1}{h}[\alpha(\{x_n(t)+hf(t, x_n(t))+h\varepsilon_n(h)\})-\alpha(\{x_n(t)\})]$$

$$\leqslant\frac{1}{h}[\alpha(\{x_n(t)+hf(t,x_n(t))\})-\alpha(\{x_n(t)\})+\alpha(\{h\varepsilon_n(h)\})]$$

$$\leqslant\frac{1}{h}[hG(t,\alpha(\{x_n(t)\}))+h\alpha(\{\varepsilon_n(h)\})]$$

$$=G(t, \alpha(\{x_n(t)\}))+\alpha(\{\varepsilon_n(h)\})$$

$$\leqslant G(t, m(t))+\alpha(\{\varepsilon_n(h)\}). \tag{7.2.10}$$

下证$\alpha(\{\varepsilon_n(h)\})\to 0$（$h\to 0$时）。任给$\varepsilon>0$，因为$f$在$A=[t, t+1]\times\{x\in E\,|\,\|x\|\leqslant 1\}$上是一致连续的，故存在$\delta>0$，使当$|t_1-t_2|+\|y_1-y_2\|<\delta$，$(t_1, y_1)\in A$，$(t_2,y_2)\in A$时$\|f(t_1, y_1)-f(t_2, y_2)\|<\varepsilon$。由于$\{x_n(t)\}$是等度连续的，故存在$\delta_1>0$，使当$t_1\in(t-\delta_1,t+\delta_1)$时$\|x_n(t_1)-x_n(t)\|+|t_1-t|<\delta$。于是当$h<\delta$时

$$\|h\varepsilon_n(h)\|=\|x_n(t+h)-x_n(t)-hf(t, x_n(t))\|$$

$$=\left\|\int_t^{t+h}(f(s,x_n(s))-f(t,x_n(t)))ds\right\|\leqslant\int_t^{th}\|f(s,x_n(s))$$

$$-f(t, x_n(t))\|ds\leqslant\int_t^{th}\varepsilon ds=\varepsilon h,$$

即$\|\varepsilon_n(h)\|\leqslant\varepsilon$。这表明$\alpha(\{\varepsilon_n(h)\})\leqslant 2\varepsilon$（$h<\delta$时）。从而有$\lim\limits_{h\to 0^+}\alpha(\{\varepsilon_n(h)\})=0$。因此在(7.2.10)式中令$h\to 0$，得

$$D^+m(t)\leqslant G(t, m(t)).$$

注意到$m(t^*)=0$，并且$u'=G(t, u)$，$u(t^*)=0$只有零解，所以在$[t^*, +\infty)$上$m(t)\equiv 0$.□

引理7.2.2 设f在$R_+\times E$的任何有界集上都是一致连续的，并且对E中的有任一有界集A及$h<0$，$t\in[T,\infty]$，有

$$\alpha(\{x+hf(t,x)|x\in A\})-\alpha(A)\leqslant hF(t,\alpha(A)), \quad (7.2.11)$$

其中$F\in C[R_+\times R_+, R_+]$，并满足：对任给$(t_0,u_0)\in[T,\infty)\times R_+$，初值问题$u'=F(t, u)$，$u(t_0)=u_0$都有左向解$u(t)$（即$u(t)$在以$t_0$为右端点的某个区间上有定义），并对该初值问题的每一个左向解$u(t)$，都存在$t_1\in(T,t_0]$，使$u(t_1)=0$。则存在$t^*\in(T, +\infty)$，使$m(t^*)=0$。

证 令$t\in[T, +\infty)$，$h>0$，把$x_n(t-h)$表为

$$x_n(t-h)=x_n(t)-hf(t,x_n(t))-h\varepsilon_n(h)$$

的形式，则有

$$\frac{1}{h}[m(t)-m(t-h)]=\frac{1}{h}[\alpha(\{x_n(t)\})-\alpha(\{x_n(t-h)\})]$$

$$=\frac{1}{h}[\alpha(\{x_n(t)\})-\alpha(\{x_n(t)-hf(t,x_n(t))-h\varepsilon_n(h)\})]$$

$$\geqslant\frac{1}{h}[\alpha(\{x_n(t)\})-\alpha(\{x_n(t)-hf(t,x_n(t))\})$$

$$+\alpha(\{-h\varepsilon_n(h)\})]$$

$$\geqslant\frac{1}{h}[hF(t,\alpha(\{x_n(t)\}))+h\alpha(\{\varepsilon_n(h)\})]$$

$$=F(t,m(t))+\alpha(\{\varepsilon_n(h)\})]$$

由引理7.2.1的证明知当$h\to 0$时，$\alpha(\{\varepsilon_n(h)\})\to 0$，故可知

$$D_-m(t)\geqslant F(t,m(t)). \quad (7.2.12)$$

由(7.2.7)式可知必有$m(t)\leqslant 4r(\infty,t_0,\|v\|)$.对$t_0>T$，令$R(t, t_0,4r(\infty,t_0,\|v\|))$表示$u'=F(t, u)$，$u(t_0)=4r(\infty, t_0,\|v\|)$

的最大解，则由(7.2.12)式知有

$$m(t)\leqslant R(t,\ t_0,\ 4r(\infty,t_0,\ \|v\|)).$$

从而由定理条件即可知存在$t^*\geqslant T$，使$m(t^*)=0$. □

7.3 稳定性和渐近状态

本节中我们将考察方程

$$\begin{cases}x'=A(t)x+f(t,\ x)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}\tag{7.3.1}$$

解的稳定性，其中我们将假定$f\in C[R_+\times E,\ E]$，对每个t，$A(t)$是E中的一个线性算子，并且$A(t)$的定义域$D(A(t))$与t无关。我们将假定初值问题(7.3.1)的解总是存在的。我们还将假定对每一个$t\geqslant 0$和充分小的$h>0$，$R[h,A(t)]=[I-hA(t)]^{-1}$是E上的有界线性算子，并且

$$\lim_{h\to 0}R[h,\ A(t)]x=x,\ \forall x\in E.\tag{7.3.2}$$

先证明一个比较定理，它是我们讨论稳定性判据的基础。

定理7.3.1 设

(i)$V\in C[R_+\times E,\ R_+]$，并且对一切$(t,x_1)$，$(t,x_2)\in R_+\times E$，有

$$|V(t,\ x_1)-V(t,\ x_2)|\leqslant L(t)\|x_1-x_2\|,$$

其中$L(t)\geqslant 0$，并且$L(t)$在R_+上是连续的；

(ii)存在$g\in C[R_+\times R_+,\ R]$,使得对一切$(t,\ x)\in R_+\times E$，有

$$D^+V(t,\ x)\leqslant g(t,\ V(t,\ x)),\tag{7.3.3}$$

其中

$$D^+V(t,\ x)=\overline{\lim_{h\to0^+}}\frac{1}{h}[V(t+h,\ R[h,\ A(t)]x$$
$$+hf(t,\ x))-V(t,\ x)],$$

(iii)初值问题

$$u'=g(t,\ u),\ u(t_0)=u_0\geqslant 0 \tag{7.3.4}$$

的最大解$r(t,\ t_0,\ u_0)$在$[t_0,+\infty)$上存在

则$V(t_0,\ x_0)\leqslant u_0$蕴含着

$$V(t,\ x(t,t_0,x_0))\leqslant r(t,t_0,u_0),\ t\geqslant t_0, \tag{7.3.5}$$

其中$x(t,\ t_0,\ x_0)$是初值问题(7.3.1)的解。

证 设$V(t_0,\ x_0)\leqslant u_0$，$x(t,\ t_0,\ x_0)$是初值问题(7.3.1)的解。令$m(t)=V(t,\ x(t,t_0,x_0))$，对充分小的$h>0$，有(下面简记$x(t)=x(t,t_0,x_0)$)

$$m(t+h)-m(t)\leqslant L(t+h)\|x(t+h)$$
$$-R[h,A(t)]x(t)-hf(t,x(t))\|$$
$$+V(t+h,R[h,A(t)]x(t)+hf(t,x(t)))-V(t,x(t)).$$

注意到$R[h,\ A(t)][I-hA(t)]x=x$，故有

$$R[h,\ A(t)]x+hf(t,\ x)=x+h(A(t)x+f(t,x)$$
$$+h(R[t,\ A(t)]A(t)x-A(t)x),$$

从而

$$m(t+h)-m(t)\leqslant L(t+h)\|x(t+h)(-x(t))$$
$$-h(A(t)x(t)+f(t,x(t)))\|$$
$$+L(t+h)h\|R[h,A(t)]A(t)x(t)-A(t)x(t)\|$$
$$+V(t+h,R[h,A(t)]x(t)+hf(t,x(t)))$$
$$-V(t,\ x(t)). \tag{7.3.6}$$

注意到(7.3.2)式及(7.3.3)式，由(7.3.6)式可得

$$D^+m(t)\leqslant g(t,\ m(t))$$

从而由定理1.2.6可知(7.3.5)式成立.□

系7.3.1 设$g\in C[R_+\times R_+,\ R]$，并且对$(t,x)\in R_+\times E$，有

$$\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}(\|R[h,A(t)]x+hf(t,x)\|-\|x\|)\leqslant g(t,\|x\|).\quad(7.3.7)$$

设初值问题(7.3.4)的最大解$r(t,t_0,u_0)$在$[t_0,+\infty)$上存在，$\|x_0\|\leqslant u_0$。则

$$\|x(t,t_0,x_0)\|\leqslant r(t,t_0,u_0),\quad t\geqslant t_0,\qquad(7.3.8)$$

其中$x(t,t_0,x_0)$是初值问题(7.3.1)的解.

证 在定理7.3.1中，令$V(t,x)=\|x\|$即可.□

下面我们假定对任给$(t_0,x_0)\in R_+\times E$，初值问题(7.3.1)的右行饱和解都存在。设$\overline{x}(t)$是初值问题(7.3.1)的某一特解.

定义7.3.1 若对任给$\varepsilon>0$，$t_0\geqslant 0$，都存在$\delta(\varepsilon,t_0)>0$，使得只要$x_0\in E$，

$$\|x_0-\overline{x}(t_0)\|<\delta(\varepsilon,\ t_0),\qquad(7.3.9)$$

初值问题(7.3.1)的解$x(t,t_0,x_0)$就都对$t\geqslant t_0$有定义，并且当$t\geqslant t_0$时有

$$\|x(t,\ t_0,\ x_0)-\overline{x}(t)\|<\varepsilon,\qquad(7.3.10)$$

则称解$\overline{x}(t)$是稳定的.

定义7.3.2 若定义7.3.1中的δ与t_0无关，即对任给$\varepsilon>0$，都存在$\delta(\varepsilon)>0$，使得对任给$t_0\geqslant 0$，$x_0\in E$，只要$\|x_0-\overline{x}(t_0)\|<\delta(\varepsilon)$，初值问题(7.3.1)的解$x(t,t_0,x_0)$就都对$t\geqslant t_0$有定义，并且对$t\geqslant t_0$，(6.3.10)式成立，则称解$\overline{x}(t)$是一致稳定的.

定义7.3.3 若对任给$t_0\geqslant 0$，都存在$\eta(t_0)>0$，使得对任给$x_0\in E$，$\|x_0-\overline{x}(t_0)\|<\eta(t_0)$，都有

$$\lim_{t\to+\infty}(x(t,t_0,x_0)-\overline{x}(t))=0,\qquad(7.3.11)$$

则称解$\overline{x}(t)$是吸引的。

特别地，若(7.3.11)式关于x_0是一致地成立，即对任给$\varepsilon>0$，$t_0\geqslant 0$，都存在$\eta(t_0)>0$和$\sigma(\varepsilon, t_0)>0$，使得只要$\|x_0-\overline{x}(t_0)\|<\eta(t_0)$，$t\geqslant t_0+\sigma(\varepsilon, t_0)$，就有

$$\|x(t, t_0, x_0)-\overline{x}(t)\|<\varepsilon,$$

则称解$\overline{x}(t)$是同等吸引的。

若上述定义中的η和σ均与t_0无关，则称解$\overline{x}(t)$是一致吸引的。

定义7.3.4 若解$\overline{x}(t)$既是稳定的，又是吸引的，则称$\overline{x}(t)$是渐近稳定的；若$\overline{x}(t)$既是稳定的，又是同等吸引的，则称$\overline{x}(t)$是同等渐近稳定的；若$\overline{x}(t)$既是一致稳定的，又是一致吸引的，则称$\overline{x}(t)$是一致渐近稳定的。

显然，我们可以只研究方程(7.3.1)零解的各种稳定性质而不失其一般性。因为对方程(7.3.1)的任一特解$\overline{x}(t)$的稳定性质，都可以通过变换$y=x-\overline{x}(t)$化为关于方程

$$y'=A(t)y+f(t,y+\overline{x}(t))-f(t,\overline{x}(t))$$

的零解的稳定性质。

下面令

$$K=\{\varphi\in C[R_+, R_+]\mid\varphi(0)=0,\ \varphi(x)\text{是严格增的}\}.$$

定理7.3.2 设定理7.3.1的条件(i)(ii)成立。设初值问题(7.3.4)的解处处局部存在唯一，

$$f(t, 0)\equiv 0,\ g(t,0)\equiv 0,\ V(t,0)\equiv 0;$$

并且存在$a\in K$，使得

$$V(t,x)\geqslant a(\|x\|),\ V(t,x)\in R_+\times E. \qquad (7.3.12)$$

则有下列结论成立：

(i)如果方程

$$u'=g(t,\ u) \tag{7.3.13}$$

的零解是稳定的，则方程

$$x'=A(t)x+f(t,\ x) \tag{7.3.14}$$

的零解是稳定的；

(ii)如果方程(7.3.13)的零解是渐近稳定的，则方程(7.3.14)的零解是同等渐近稳定的。

如果有存在函数$b\in K$，使得

$$V(t,\ x)\leqslant b(\|x\|),\ \forall(t,\ x)\in R_+\times E. \tag{7.3.15}$$

则进一步有下列结论：

(iii)如果方程(7.3.13)的零解是一致稳定的，则方程(7.3.14)的零解是一致稳定的；

(iv)如果方程(7.3.13)的零解是一致渐近稳定的，则方程(7.3.14)的零解是一致渐近稳定的。

证 对任给$(t_0,x_0)\in R_+\times E$，令$x(t,t_0,x_0)$和$u(t,t_0,V(t_0,x_0))$分别是方程(7.3.13)和方程(7.3.14)通过(t_0,x_0)和$(t_0,V(t_0,x_0))$的右行饱和解，则根据定理7.3.1，有

$$V(t,\ x(t,t_0,x_0))\leqslant u(t,t_0,V(t_0,x_0)). \tag{7.3.16}$$

又由(7.3.12)式可知

$$a(\|x(t,t_0,x_0)\|)\leqslant V(t,x(t,t_0,x_0)), \tag{7.3.17}$$

先证结论(i)。设方程(7.3.13)的零解是稳定的，则对任给$\varepsilon>0$，$t_0\geqslant 0$，都存在$\delta^*=\delta^*(t_0,\ \varepsilon)>0$，使当$0\leqslant u_0<\delta^*$时，对一切$t\geqslant t_0$，都有

$$0\leqslant u(t,\ t_0,\ u_0)<a(\varepsilon).$$

由V的连续性可知，必存在$\delta^*=\delta(t_0,\varepsilon)>0$，使当$\|x_0\|<\delta(t_0,\varepsilon)$时，有$0\leqslant V(t_0,\ x_0)<\delta^*(t_0,\ \varepsilon)$，从而

$$0\leqslant u(t,\ t_0,\ V(t_0,\ x_0))<a(\varepsilon).$$

由(7.3.16)和(7.3.17)两式可知，当$\|x_0\|<\delta(t_0, \varepsilon)$时，对一切$t\geqslant t_0$，都有$\|x(t, t_0, x_0)\|<\varepsilon$，所以方程(7.3.14)的零解是稳定的。(i)获证。

再证结论(ii)，若方程(7.3.13)的零解是渐近稳定的，故它是同等渐近稳定的（对纯量方程(7.3.13)而言，不难证明，零解的渐近稳定性和同等渐近稳定性是等价的）。因此，对任给$t_0\geqslant 0$，$\varepsilon>0$，都存在$\eta^*(t_0)>0$和$\sigma(t_0,\varepsilon)>0$，使当$0\leqslant u_0<\eta^*(t_0)$时，对一切$t\geqslant t_0+\sigma(t_0,\varepsilon)$，都有

$$0\leqslant u(t, t_0, u_0)<a(\varepsilon).$$

又根据V的连续性，必存在$\eta(t_0)>0$，使当$\|x_0\|<\eta(t_0)$时有$0\leqslant V(t_0, x_0)<\eta^*(t_0)$。从而当$t\geqslant t_0+\sigma(t_0,\varepsilon)$时

$$0\leqslant u(t, t_0, V(t_0,x_0))<a(\varepsilon).$$

于是由(7.3.16)和(7.3.17)两式知，当$\|x_0\|<\eta(t_0)$时，对一切$t\geqslant t_0+\sigma(t_0, \varepsilon_0)$，有

$$\|x(t, t_0, x_0)\|<\varepsilon.$$

这说明零解是同等吸引的，从而（注意结论(i)）是同等渐近稳定的。(ii)获证。

为证明结论(iii)，只须注意到：在(iii)的假设下，结论(i)的证明中的δ^*和δ的选取可以不依赖于t_0。为证明结论(iv)，只须注意到：在(iv)的假设下，结论(ii)的证明中的η^*，σ和η的选取可以不依赖于t_0。□

7.4 同等有界性

本节讨论Banach空间常微分方程

$$\begin{cases} x' = f(t,\ x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{7.4.1}$$

解的同等有界性，其中设$f \in C[R_+ \times E, E]$，并且对任给$(t_0, x_0) \in R_+ \times E$，初值问题(7.4.1)的解都在$[t_0,\ +\infty)$上存在。

定义7.4.1 如果对任给$\alpha \geqslant 0$，$t_0 \geqslant 0$，都存在$\beta = \beta(t_0, \alpha) > 0$，使得只要$x_0 \in E$，$\|x_0\| \leqslant \alpha$，就有

$$\|x(t, t_0, x_0)\| < \beta,\ \forall t \geqslant t_0,$$

（这里$x(t, t_0, x_0)$表初值问题(7.4.1)的解），则称初值问题(7.4.1)的解是同等有界的；若上述定义中的β与t_0无关，则称初值问题(7.4.1)的解是一致有界的。

在本节中，使用下列假设：

(i)A是E中的紧集，$V_1 \in C[R_+ \times (\overline{E \setminus A}),\ R_+]$，$V_1(t, x)$关于$x$满足局部Lipschitz条件，当$(t,\ x) \in R_+ \times \partial A$时$V_1$是有界的，并且对每个$t \in R_+$，$V(t,\ x)$在$\overline{E \setminus A}$的每个有界集上是有界的；

(ii)存在$g_1 \in C[R_+ \times R_+,\ R]$，使得

$$D^+V_1(t, x) \leqslant g_1(t, V_1(t, x)),\ (t, x) \in R_+ \times \overline{E \setminus A}), \tag{7.4.2}$$

其中

$$D^+V_1(t, x) = \overline{\lim_{h \to 0}} \frac{1}{h}[V_1(t+h, x+hf(t, x)) - V_1(t, x)]$$

(iii)$V_2 \in C[R_+ \times M,\ R_+]$（其中$M = \{x \in E \mid \|x\| \geqslant \rho\}$，$\rho > 0$是一实数），$V_2(t, x)$关于$x$满足局部Lipschitz条件，并满足

$$b(\|x\|) \leqslant V_2(t, x) \leqslant a(\|x\|),\ \forall (t,\ x) \in R_+ \times M, \tag{7.4.3}$$

其中a，$b \in C[[\rho,\ +\infty),\ R_+]$，$\lim\limits_{u \to +\infty} b(u) = +\infty$，

(iv)存在$g_2 \in C[R_+ \times R_+, R]$，使得对$(t,\ x) \in R_+ \times M$，有

$$D^+V_1(t,x)+D^+V_2(t,x)\leqslant g_2(t,V_1(t,x)+V_2(t,x)) \tag{7.4.4}$$

定理7.4.1 设假设(i)～(iv)满足．设

$$u'=g_1(t,\ u),\ u(t_0)=u_0\geqslant 0 \tag{7.4.5}$$

的解是同等有界的，并且

$$v'=g_2(t,v),\ v(t_0)=v_0\geqslant 0 \tag{7.4.6}$$

的解是一致有界的，则方程(7.4.1)的解是同等有界的．

证 因为A是紧集，故可取$\rho_1>\rho$，使

$$\{x\in E\,|\,d(x,\ A)<1\}\subset\{x\in E\,|\,\|x\|\leqslant\rho_1\} \tag{7.4.7}$$

设$t_0\geqslant 0$，$\alpha\geqslant\rho_1$给定．令$\alpha_1=\alpha_1(t_0,\ \alpha)=\max\{\alpha_0,\alpha^*\}$，其中

$$\alpha_0=\max\left\{V_1(t_0,x_0)\,|\,x_0\in\overline{\{x\in E\,|\,\|x\|\leqslant\alpha,x\bar{\in}A\}}\right\},$$

$$\alpha^*=\sup\{V_1(t,x)\,|\,(t,x)\in R_+\times\partial A\}.$$

因为方程(7.4.5)的解是同等有界的，所以对上述$\alpha_1>0$及$t_0\geqslant 0$，存在$\beta_0=\beta_0(t_0,\ \alpha_1)>0$，使得对$u_0<\alpha_1$，有

$$u(t,\ t_0,\ u_0)<\beta_0,\quad t\geqslant t_0, \tag{7.4.8}$$

这里$u(t,\ t_0,\ u_0)$是方程(7.4.5)的解．因为方程(7.4.6)的解是一致有界的，所以对任给$\alpha_2>0$，存在$\beta_1(\alpha_2)>0$，使得只要$v_0<\alpha_2$，就有

$$v(t,\ t_0,\ v_0)<\beta_1(\alpha_2),\quad t\geqslant t_0 \tag{7.4.9}$$

这里$v(t,\ t_0,\ v_0)$是方程(7.4.6)的解，我们令$u_0=V_1(t_0,x_0)$，$\alpha_2=a(\alpha)+\beta_0$．因为$\lim\limits_{u\to+\infty}b(u)=+\infty$，故存在$\beta=\beta(t_0,\alpha)>\alpha$，使

$$b(\beta)>\beta_1(\alpha_2) \tag{7.4.10}$$

下面我们证明，只要$x_0\in E$，$\|x_0\|<\alpha$，就必有

$$\|x(t,\ t_0,\ x_0)\|<\beta,\quad t\geqslant t_0,$$

其中$x(t,\ t_0,\ x_0)$是初值问题(7.4.1)的任意一解．用反证法，

若上述结论不真，则存在$x_0\in E$,$\|x_0\|<\alpha$,及初值问题 (7.4.1) 的一个解$x(t, t_0, x_0)$及$t^*>t_0$，使得$\|x(t^*, t_0, x_0)\|=\beta$。由(7.4.7)式及$\alpha\geqslant\rho_1$知

$$\{x\in E \mid d(x, A)<1\}\subset\{x\in E \mid \|x\|<\alpha\},$$

所以有下列两种可能：

(Ⅰ)对一切$t\in[t_0, t^*]$，$x(t, t_0, x_0)\in E\setminus A$,

(Ⅱ)存在$t_0\leqslant\bar{t}\leqslant t^*$，使$x(\bar{t},t_0,x_0)\in\partial A$,而对$t\in[\bar{t},t^*]$, $x(t, t_0, x_0)\in E\setminus A$。

若可能性(Ⅰ)出现，则存在$t_0\leqslant t_1\leqslant t^*$，使

$$\|x(t_1, t_0, x_0)\|=\alpha,\quad \|x(t^*,t_0,x_0)\|=\beta, \tag{7.4.11}$$

$$\|x(t, t_0, x_0\|\geqslant\alpha,\quad t\in[t_1\ t^*]. \tag{7.4.12}$$

令$m(t)=V_1(t,x(t,t_0,x_0))+V_2(t,x(t,t_0,x_0))(t\in[t_1,t^*])$,则由(7.4.4)式可以得到微分不等式

$$D^+m(t)\leqslant g_2(t, m(t)),\quad t\in[t_1, t^*].$$

从而根据定理1.2.6,

$$m(t)\leqslant r_2(t, t_1, m(t_1)),\quad t\in[t_1,t^*],$$

其中$r_2(t, t_1, m(t_1))$是初值问题

$$v'=g_2(t, v),\quad v(t_1)=m(t_1)$$

的最大解，因此,

$$\begin{aligned}V_1(t^*,x(t^*,t_0,x_0))&+V_2(t^*,x(t^*,t_0,x_0))\\ &\leqslant r_2(t^*, t_1,V_1(t_1,x(t_1, t_0, x_0))\\ &\qquad +V_2(t_1, x(t_1,t_0,x_0))).\end{aligned} \tag{7.4.13}$$

同样地，利用(7.4.2)式，可得

$$V_1(t_1,x(t_1,t_0,x_0))\leqslant r_1(t_1, t_0,V_1(t_0,x_0)), \tag{7.4.14}$$

其中$r_1(t, t_0, u_0)$是初值问题 (7.4.5) 的最大解，注意到$u_0=V_1(t_0, x_0)<\alpha_1$，故由(7.4.8)式可知

$$r_1(t_1,\ t_0,\ V_1(t_0,\ x_0))\beta_0. \tag{7.4.15}$$

由(7.4.3))和(7.4.11)两式可知

$$V_2(t_1,\ x(t_1,t_0,x_0))\leqslant a(\alpha),$$

从而

$$v_0=V_1(t_1,x(t_1,t_0,x_0))+V_2(t_1,x(t_1,t_0,x_0))$$

$$<\beta_0+a(\alpha)=\alpha_2. \tag{7.4.16}$$

从(7.4.3)、(7.4.9)、(7.4.11)、(7.4.16)和(7.4.13) 诸式可得

$$b(\beta)\leqslant\beta_1(\alpha_2). \tag{7.4.17}$$

此与(7.4.10)式矛盾.

若可能性(Ⅱ)出现，则对某$t_1>\overline{t}$，仍有$\|x\ (t_1,t_0,x_0)\|=\alpha$，从而(7.4.13)式仍成立. 此时，(7.4.14)式变为

$$V_1(t,\ x(t_1,t_0,x_0))\leqslant r_1(t_1,\overline{t},V(\overline{t},x(\overline{t},t_0,x_0)))$$

因为$x(\overline{t},t_0,x_0)\in\partial A,V_1(\overline{t},x(\overline{t},t_0,x_0))\leqslant\alpha^*\leqslant\alpha_1$，故(7.4 17)式仍成立，从而也导致矛盾.□

7.5 解集的全局结构

考察Banach空间常微分方程初值问题

$$x'=f(t,\ x),\quad x(t_0)=x_0 \tag{7.5.1}$$

由第三章我们知道，如果$f(t,\ x)$满足紧型条件，我们可以保证方程(7.5.1)在某个区间$[t_0,t_0+\alpha']$有解.一般地说，在紧型条件下方程(7.5.1)的解不是唯一存在的.因此有必要讨论方程(7.5.1)解集的全局结构

定理7.5.1 设定理3.1.2或定理3.1.3的条件满足.令

$$S=\{x(t):[t_0,t_0+\alpha']\to E\,|\,x(t)\text{在}[t_0,\ t_0+\alpha')$$

$$\text{上是初值问题(7.5.1)的解}\},$$

其中α'由定理3.1.2或定理3.1.3确定，则S在$C\,[[t_0,t_0+\alpha'],E]$中是紧的连通集．

证 设$x_n(t)\in S(n=1,2,\cdots)$，则每个$x_n(t)$也都可以看成是方程（7.5.1）的$\frac{1}{n}$－近似解．所以重复定理3.1.2（或定理3.1.3）的证明可知，$\{x_n(t)\}$必有一子列在$[t_0,\ t_0+\alpha']$上一致收敛于某$x^*(t):[t_0,\ t_0+\alpha']\to E$，并且$x^*(t)$也是方程（7.5.1)的解，即$x^*(t)\in S$．这表明$S$是$C\,[[t_0,\ t_0+\alpha'],E]$中的紧集．

下证S是$C[[t_0,\ t_0+\alpha'],E]$中的连通集．若不然，假定S不是连通的，则存在$S_1\subset S$，$S_2\subset S$，使得$S_1\cap S_2=\phi$，$S=S_1\cup S_2$，并且S_1和S_2都是S中的闭集．因为S是紧集，故S_1和S_2也都是紧集．从而$\beta=d(S_1,\ S_2)>0$（$d(S_1,\ S_2)$表示S_1和S_2之间的距离)．对任给$x\in C[[t_0,\ t_0+\alpha'],\ E]$，定义

$$\varphi(x)=d(x,\ S_1)-d(x,\ S_2)$$

则φ：$C[[t_0,\ t_0+\alpha'],\ E]\to R^1$是连续的，并且显然

$$\varphi(x)\leqslant-\beta,\quad \forall x\in S_1, \tag{7.5.2}$$

$$\varphi(x)\geqslant\beta,\quad \forall x\in S_2. \tag{7.5.3}$$

任给$\varepsilon>0$，由引理3.1.1知存在g_ε：$[t_0,\ t_0+a]\times B(x_0,\ b)\to E$，使得

$$\|f(t,\ x)-g_\varepsilon(t,\ x)\|\leqslant\varepsilon,\forall(t,x)\in[t_0,t_0+a]\times B(x_0,b)$$

并且$g_\varepsilon(t,\ x)$满足局部Lipschitz条件．设$x_1\in S_1$，$x_2\in S_2$给定，令

$$f^1(t,x)=g_\varepsilon(t,x)+f(t,x_1(t))-g_\varepsilon(t,x_1(t)),$$

$$f^2(t,x)=g_\varepsilon(t,x)+f(t,x_2(t))-g_\varepsilon(t,x_2(t));$$

对$0\leqslant\lambda\leqslant1$，令

$$f_\lambda(t,x)=f^1(t,x)+\lambda[f^2(t,x)-f^1(t,x)].$$

则显然$f_\lambda(t,x)$满足局部Lipschitz条件，并且

$$\|f_\lambda(t,x)-f(t,x)\|\leqslant 2\varepsilon$$

考察初值问题

$$x'=f_\lambda(t,x),\quad x(t_0)=x_0. \tag{7.5.4}$$

显然当ε充分小时（即对某ε_0，当$0<\varepsilon<\varepsilon_0$时），初值问题(7.5.4)有定义在$[t_0,\ t_0+\alpha']$上的唯一解$x^\lambda$，并且该解对$\lambda$是连续相依的．因此，若令

$$\psi(\lambda)=\varphi(x^\lambda),$$

则ψ在$[0,1]$上是连续的．因为

$$f_0(t,x_1(t))=f^1(t,x_1(t))=x_1'(t),$$

所以$x^0=x_1$（因为初值问题(7.5.4)的解是唯一的）．同样可知$x^1=x_2$．由(7.5.2)和(7.5.3)两式可知

$$\psi(0)\leqslant-\beta,\quad \psi(1)\geqslant\beta,$$

所以必存在$\lambda(\varepsilon)\in(0,\ 1)$，使

$$\psi(\lambda(\varepsilon))=0.$$

取一串ε_n，使$0<\varepsilon_n<\varepsilon_0$，$\varepsilon_n\to 0$；令$x_n=x^{\lambda(\varepsilon_n)}$．

因为

$$x_n'=f(t,x_n(t))+y_n(t),\quad x_n(0)=x_0,$$

其中

$$\|y_n(t)\|=\|f_{\lambda(\varepsilon_n)}(t,x_n(t))-f(t,x_n(t))\|\leqslant 2\varepsilon_n.$$

所以利用定理3.1.2（或定理3.1.3）的证明方法可知$\{x_n(t)\}$必有一子列$\{x_{n_i}(t)\}$在$[t_0,t_0+\alpha']$上一致收敛于方程(7.5.1)的解$x^*(t)$．所以

$$\varphi(x^*)=\lim_{n_i\to\infty}\varphi(x_{n_i})=\lim_{n_i\to\infty}\varphi(x^{\lambda(\varepsilon_{n_i})})$$

$$=\lim_{n_i\to\infty}\psi(\lambda(\varepsilon_{n_i}))=0.$$

此与(7.5.2)和(7.5.3)两式矛盾（注意$x^*\in S$，$S=S_1\cup S_2$)证完。□

由此可知，在定理3.1.2或定理3.1.3的条件下，如果方程(7.5.1)的解不是唯一的话，则方程(7.5.1)必定有无穷多个解。

最后我们说明一点，在耗散型条件下，因为方程（7.5.1)的解存在唯一，所以在耗散型条件下不存在解集的全局结构问题。

7.6 附　　注

全局存在定理7.1.1选自Ladas和Lakshmikantham[1]，而定理7.1.2是在Eisenfeld和Lakshmikantham[1]中证明的。

关于渐近均衡性的定理7.2.1和定理7.2.2取自Mitchell和Mitchell[1]。其它的进一步结果可以在Bernfeld,Hallam和Lakshmikantham[1]，Ladas和Lakshmikantham[1]中找到。

定理7.3.1和定理7.3.2及其与稳定性有关的进一步结果可看Lakshmikantham[1],[2]，Ladas和Lakshmikantham[2]以及Neustupa[1]。

关于同等有界性的定理7.4.1见Lakshmikantham[2]。

第八章　弱拓扑下的解

本章研究在弱拓扑下，Banach空间常微分方程初值问题解的存在性。

8.1　弱拓扑下的近似解

先给出和弱拓扑有关的一些概念。设E是Banach空间，$I\subset R^1$是一个区间，$x(t):I\to E$是一个函数。

定义8.1.1　(i) 如果对任给$\varphi\in E^*$，$\varphi(x(t))$在I上连续，则称$x(t)$在I上弱连续；

(ii) 如果存在$x_0\in E$，使得对任给$\varphi\in E^*$，都有$\varphi(x_0)=\int_I\varphi(x(s))\,ds$，则称$x(t)$在$I$上弱可积，记为$x_0=\int_I x(s)\,ds$，并称$x_0$是$x(t)$在$I$上的弱积分；

(iii) 设$t_0\in I$，如果存在点$y\in E$，使得对任给$\varphi\in E^*$，都有$\varphi(y)=(\varphi x)'(t_0)$，则称$x(t)$在$t_0$处弱可微，$y$称为是$x(t)$在$t_0$处的弱导数，并记为$x'(t_0)=y$。如果$x(t)$在$I$的每一点处都弱可微，则导函数$x'(t):I\to E$也称为是$x(t)$的弱导数。

定义8.1.2　设$\{x_n(t)\}$是映I入E的函数族。

(i) 若存在$x(t):I\to E$，使得对任给$\varphi\in E^*$，$\{\varphi(x_n(t))\}$在I上都一致收敛于$\varphi(x(t))$，则称$x_n(t)$在I上弱一致收敛于$x(t)$；

(ii) 若对任给$\varphi\in E^*$，$\{\varphi(x_n(t))\}$ 都是I上的等度连续函数族，则称$\{x_n(t)\}$在I上弱等度连续。

显然，若$x(t)$弱连续，E弱序列完备，则$x(t)$ 弱可积。若$x(t)$弱可微，则$x(t)$弱连续。若$x(t)$在$[a,b]$上弱连续，$F(t)=\int_a^t x(s)ds$，则$F(t)$的弱导数$F'(t)$存在，并且有$F'(t)=x(t)$。

关于Banach空间中的弱拓扑，下列定理是重要的：

定理8.1.1 (Eberlein-Smulian定理) 设A是Banach空间E的子集，则下列命题等价：

(i) A是弱序列紧的，即A的任一序列都必有子列弱收敛于某E中的点；

(ii) A的任一无穷子集都在E中有弱极限点；

(iii) A在E的弱拓扑下的闭包是弱紧的。

这一定理的证明见Dunford和Schwartz[1]。

用与著名的Ascoli-Arzela 定理相类似的证明方法，可以证明下列定理：

定理8.1.2 设$\{x_n(t)\}$ 是映$I\subset R^1$入E的弱等度连续函数族，并对每个固定的$t_0\in I$，$\{x_n(t_0)\}$ 都是E中的相对弱紧集。则$\{x_n(t)\}$必有子列在I上弱一致收敛于某一弱连续函数 $x(t)$：$I\to E$。

设I是R^1中的区间，D是E中的子集，$f:I\times D\to E$ 是一个算子。

定义8.1.3 (i) 设$(t_0,x_0)\in I\times D$。如果对任给 $\varepsilon>0$ 和$\varphi\in E^*$，都存在$\delta=\delta(\varepsilon,\varphi)>0$ 及E中含有x_0的弱开集$V=V(\varphi,\varepsilon)$，使得对$|t-t_0|<\delta$，$x\in U$，$(t,x)\in I\times D$，都有$|\varphi(f(t,x)-f(t_0,\varphi_0))|<\varepsilon$。则称$f(t,x)$在$I\times D$上是弱弱连续

的。

(ii) 如果对任给$\varepsilon>0$和$\varphi\in E^*$，都存在$\delta=\delta(\varepsilon,\varphi)>0$及$\{\varphi_i\in E^*|i=1,2,\cdots,n(\varepsilon,\varphi)\}$，使得对任给$(t,x)\in I\times D$，$(s,y)\in I\times D$，$|t-s|<\delta$，$|\varphi_i(x-y)|<\delta$ $(i=1,2,\cdots,n(\varepsilon,\varphi))$，都有

$$|\varphi(f(t,x)-f(s,y))|<\varepsilon,$$

则称$f(t,x)$在$I\times D$上是弱弱一致连续的。

下面将在弱拓扑下讨论Banach空间常微分方程初值问题。设E是Banach空间，a，b是两个实数。令$B(x_0,b)=\{x\in E\mid \|x-x_0\|\leqslant b\}$，$R_0=[t_0,t_0+a]\times B(x_0,b)$。考察Banach空间常微分方程初值问题。

$$\begin{cases}x'(t)=f(t,x(t)),\\ x(t_0)=x_0,\end{cases}\tag{8.1.1}$$

这里$x'(t)$表示$x(t)$的弱导数，$f(t,x):R_0\to E$，$x_0\in E$。

定理8.1.3 设$f(t,x)$在R_0上是弱弱连续的，$\|f(t,x)\|\leqslant M(\forall(t,x)\in R_0)$。令$\alpha=\min\left\{a,\dfrac{b}{M}\right\}$。设$\{\varepsilon_n\}$是一串实数，满足$\varepsilon_n\to 0$，$0<\varepsilon_n<\alpha$。则初值问题(8.1.1)必存在一串近似解序列$\{x_n(t)\}$，满足

(i) $x_n(t_0)=x_0$；

(ii) 在$[t_0,t_0+\alpha]$上$\{x_n(t)\}$是强等度连续的，并且是一致有界的；

(iii) $x_n'(t)=f(t,x_n(t-\varepsilon_n))$，$\forall t\in[t_0,t_0+\alpha]$，这里，$x_n'(t)$表示$x_n(t)$的弱导数。

证 设n固定。定义

$$x_n(t)=x_0+(t-t_0)f(t_0,x_0),t_0-\varepsilon_n\leqslant t\leqslant t_0, \quad (8.1.2)$$

$$x_n(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s-\varepsilon_n))ds, \ t_0\leqslant t\leqslant t_0+\alpha, \quad (8.1.3)$$

其中$\int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s-\varepsilon_n))ds$表示$f(t, x_n(s-\varepsilon_n))$在$[t_0,t]$上的弱积分。这里，(8.1.3)式中的$x_n(t)$是这样定义的：先对$t\in[t_0,t_0+\varepsilon_n]$由(8.1.3)式定义$x_n(t)$；当$x_n(t)$在$[t_0, t_0+\varepsilon_n]$上定义后，再对$t\in[t_0+\varepsilon_n,t_0+2\varepsilon_n]$由(8.1.3)式定义$x_n(t)$，依次类推，直到$x_n(t)$在$[t_0,t_0+\alpha]$上被定义。下证$x_n(t)$可以在$[t_0, t_0+\alpha]$上被定义。事实上，当$t_0\leqslant s\leqslant t_0+\varepsilon_n$时，由(8.1.2)式可知

$$\|x_n(s-\varepsilon_n)-x_0\|\leqslant|s-\varepsilon_n-t_0|\,\|f(t_0, x_0\|\leqslant\varepsilon_n\,\|f(t_0, x_0)\|\leqslant\alpha M\leqslant b.$$

故$f(s,x_n(s-\varepsilon_n))$当$t_0\leqslant s\leqslant t_0+\varepsilon_n$时有定义，从而由(8.1.3)式可知当$t_0\leqslant t\leqslant t_0+\varepsilon_n$时$x_n(t)$有定义。由$f(t,x)$在$R_0$上的弱弱连续性可知当$t_0\leqslant s\leqslant t_0+\varepsilon_n$时$f(s,x_n(s-\varepsilon_n))$是弱可积的。任给$t\in[t_0,t_0+\varepsilon_n]$，由Hahn-Banach定理知存在$\varphi_t\in E^*$，$\|\varphi_t\|=1$，使$\|x_n(t)-x_0\|=|\varphi_t(x_n(t)-x_0)|$。于是，

$$\|x_n(t)-x_0\|=|\varphi_t(x_n(t)-x_0)|$$

$$=\left|\int_{t_0}^{t}\varphi_t(f(s,x_n(s-\varepsilon_n)))\,ds\right|$$

$$\leqslant\int_{t_0}^{t}|\varphi_t(f(s,x_n(s-\varepsilon_n)))|ds\leqslant M(t-t_0)\leqslant b. \quad (8.1.4)$$

所以当$t_0+\varepsilon_n\leqslant t\leqslant t_0+2\varepsilon_n$时，(8.1.3)式有意义，从而$x_n(t)$在$[t_0+\varepsilon_n,t_0+2\varepsilon_n]$上也有定义。依次类推，即知$x_n(t)$在$[t_0,$

$t_0+\alpha]$ 上都有定义。显然，由（8．1．4）式证明可知在整个 $[t_0,t_0+\alpha]$上，都有$\|x_n(t)-x_0\|\leqslant b$，从而$\{x_n(t)\}$在$[t_0,t_0+\alpha]$上是一致有界的。

对任给 $0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant \alpha$，考虑

$$x_n(t_2)-x_n(t_1)=\int_{t_1}^{t_2} f(s,x_n(s-\varepsilon_n))ds. \quad (8.1.5)$$

利用 Hahn-Banach 延拓定理，存在$\varphi\in E^*$，$\|\varphi\|=1$，使得 $\|x_n(t_2)-x_n(t_1)\|=\varphi(x_n(t_2)-x_n(t_1))$，从而

$$\|x_n(t_2)-x_n(t_1)\|=\int_{t_1}^{t_2}\varphi(f(s,x_n(s-\varepsilon_n)))ds$$

$$\leqslant|t_2-t_1|M.$$

所以$\{x_n(t)\}$在$[t_0,t_0+\alpha]$上等度连续。(ii) 获证。(i)、(iii) 都是显然的。□

定理8.1.4 设$f(t,x)$在R_0上是弱弱连续的，$\|f(t,x)\|\leqslant M(\forall(t,x)\in R_0)$。令$\alpha=\min\left\{a,\frac{b}{M}\right\}$，$\{x_n(t)\}$ 如定理8.1.3所述。如果存在$x(t)$：$[t_0,t_0+\alpha]\to E$，使得在$[t_0,t_0+\alpha]$上$x_n(t)$ 弱收敛于$x(t)$，则$x(t)$是初值问题（8.1.1）的解。

证 根据定理8.1.2，$\{x_n(t)\}$在$[t_0,t_0+\alpha]$上弱一致收敛于$x(t)$。下证$f(t,x_n(t-\varepsilon_n))$也在$[t_0, t_0+\alpha]$上弱一致收敛于$f(t,x(t))$。任意给定$\varepsilon>0$和$\tilde{\varphi}\in E^*$。因为$f(t,x)$是弱弱连续的，所以对每个$t\in[t_0,t_0+\alpha]$，存在$\delta_t>0$和含有$x(t)$的弱开集$U_t$，使得只要$|t-s|<\delta_t$，$y\in U_t$，就有

$$|\tilde{\varphi}(f(t, x(t))-f(s, y))|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

不失一般可以假定U_t可以表为

$$U_t = \bigcap_{i=1}^{m_t} \{y \in E \| \varphi_{t,i}(x(t)-y)| < r_{t,i}\},$$

其中$\varphi_{t,i} \in E^*$, $r_{t,i} > 0\ (i=1,2\cdots,m_t)$. 令$r_t = \min\{r_{t,i} | i=1,2,\cdots,m_t\}$,

$$V_t = \bigcap_{i=1}^{m_t} \{y \in E \| \varphi_{t,i}(x(t)-y)| < r_t\}$$

因为$[t_0, t_0+\alpha]$是紧集, $x(t)$在$[t_0, t_0+\alpha]$上弱连续, 所以必存在$[t_0, t_0+\alpha]$中的有限个$t_j (1 \leqslant j \leqslant k)$, 使$\{x(t) | t \in [t_0, t_0+\alpha]\} \subset \bigcup_{j=1}^{k} V_{t_j}$. 令

$$\Phi = \{\varphi \in E^* | \varphi\text{在某个}V_{t_j}\text{中被使用}, \ 1 \leqslant j \leqslant k\},$$

则Φ是有限集. 令$r = \min\left\{\frac{1}{2} r_{t_j} \mid 1 \leqslant j \leqslant k\right\}$. 由$\{x_n(t)\}$的弱等度连续性, 对每个$\varphi \in \Phi$, 存在$\beta_\varphi$, 使得对一切, 只要$|s-t| < \beta_\varphi$, 就有

$$|\varphi(x_n(s)) - \varphi(x_n(t))| < \frac{r}{2}.$$

取$\beta = \min\{\beta_\varphi | \varphi \in \Phi\}$, 并取$N_1$, 使当$n \geqslant N_1$时$\varepsilon_n < \beta$. 由$\{x_n(t)\}$的弱一致收敛性, 对每个$\varphi \in \Phi$, 都存在$N_\varphi$, 使当$n \geqslant N_\varphi$时有

$$|\varphi(x_n(t) - x(t)| < \frac{r}{2}.$$

令$N = \max\{N_1, \max\{N_\varphi | \varphi \in \Phi\}\}$. 任给$t \in [t_0, t_0+\alpha]$, 必存在某$1 \leqslant j \leqslant k$, 使$x(t) \in V_{t_j} \subset V_{t_j}$. 于是

$$|\tilde{\varphi}(f(t, x(t)) - f(t, x(t_j))| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (8.1.6)$$

另一方面，对每个$1\leqslant i\leqslant m_{t_j}$，

$$|\varphi_{t_j,i}(x_n(t)-x(t_j))|\leqslant|\varphi_{t_j,i}(x_n(t-\varepsilon_n)-x(t))|$$

$$+|\varphi_{t_j,i}(x(t)-x(t_j))|\leqslant r+\frac{r}{2}\leqslant r_{t_j},$$

所以$x_n(t-\varepsilon_n)\in U_{t_j}$.于是

$$|\widetilde{\varphi}(f(t,x_n(t-\varepsilon_n))-f(t,x(t_j)))|<\frac{\varepsilon}{2}. \quad (8.1.7)$$

由（8.1.6）和（8.1.7）两式即知

$$|\widetilde{\varphi}(f(t,\varphi_n(t-\varepsilon_n))-f(t,x(t)))|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\varepsilon.$$

即$f(t,\varphi_n(t-\varepsilon_n))$在$[t_0,t_0+a]$上弱一致收敛于$f(t,x(t))$.

对任给$\varphi\in E^*$,

$$\varphi(x_n(t))=\varphi\left(x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,x_n(s-\varepsilon_n))ds\right)$$

令$n\to\infty$，即得

$$\varphi(x(t))=\varphi\left(x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,x(s))ds\right)$$

由此即知$x(t)$是初值问题（8.1.1）的解.□

8.2 弱紧型条件

先给出弱非紧性测度的概念.

定义8.2.1 设E是Banach空间，A是E中的有界非空集，B是E中的单位闭球.令

$$\beta(A)=\inf\{t>0\,|\,存在E中的弱紧集C，使A\subset C+tB\}, \quad (8.2.1)$$

则$\beta(A)$称为是A的弱非紧性测度.

定理8.2.1 设A，B是E中的有界集，$\{x_n\}$,$\{y_n\}$是E中

的有界序列.则下列结论成立:

(i)若$A\subset B$，则$\beta(A)\subset\beta(B)$;

(ii) $\beta(A)=\beta(\overline{A}^w)$,其中$\overline{A}^w$表示$A$的弱闭包;

(iii) $\beta(A)=0$的充要条件是A是相对弱紧集;

(iv) $\beta(A\cup B)=\max\{\beta(A),\beta(B)\}$;

(v) $\beta(\text{co}A)=\beta(A)$;

(vi) $\beta(A+B)\leqslant\beta(A)+\beta(B)$，$\beta(\{x_n\})-\beta(\{y_n\})\leqslant\beta(\{x_n-y_n\})$;

(vii) $\beta(tA)=t\beta(A),\forall t\geqslant 0$;

(viii) $\beta(A)\leqslant\text{diam}A$。

定理8.2.1的各结论都不难由定义证出，亦可见Lakshmikantham和leela〔2〕。

定理8.2.2 设E是弱序列完备的Banach空间，$f(t,x)$: $R_0\to E$是弱弱连续的，$\|f(t,x)\|\leqslant M$ ($\forall(t,x)\in R_0$)。令$\alpha=\min\left\{a,\dfrac{b}{M}\right\}$,$I=[t_0,t_0+\alpha]$.设$g:R_+\to R_+$连续，并且$u(t)\equiv 0$是初值问题

$$u'=g(u),\quad u(t_0)=0 \tag{8.2.2}$$

在$[t_0,t_0+\alpha]$上的唯一解。如果对任给$A\subset B(x_0,b)$，都有$\beta(f(I\times A))\leqslant g(\beta(A))$，则初值问题(8.1.1)存在至少一个定义在$I$上的解。

证 设$\{x_n(t)\}$如定理8.1.3所述.根据定理8.1.4,我们只需证明对任给$t\in I$，$\beta(\{x_n(t)|n=1,2\cdots\})=0$。令$m(t)=\beta(\{x_n(t)|t=1,2,\cdots\})$。显然$m(t_0)=0$，并且由$\{x_n(t)\}$的等度连续性和定理8.2.1(vi)知$m(t)$是连续的。考察$D^+m(t)$，利用定理8.2.1(vi)、(vii)可得

$$D^+m(t)=\lim_{\tau\to 0^+}\sup_{h\in[0,\tau]}\frac{1}{h}[m(t+h)-m(t)]$$

$$\leqslant \lim_{\tau\to 0^+}\sup_{h\in[0,\tau]}\frac{1}{h}[\beta(\{x_n(t+h)-x_n(t)\})]$$

$$=\lim_{\tau\to 0^+}\sup_{h\in[0,\tau]}\beta\left(\frac{1}{h}(\{x_n(t+h)-x_n(t)\})\right). \tag{8.2.3}$$

对固定的n, t,h,下证

$$\frac{1}{h}[x_n(t+h)-x_n(t)]\in\overline{co}\ \{x_n'(s)\,|\,s\in[t,\ t+h]\}. \tag{8.2.4}$$

事实上，由$x_n(t)$的弱可微性可知，对任给$\varphi\in E^*$，$\varphi(x_n(t))$是可微的，从而存在$t_\varphi\in[t,\ t+h]$,使

$$\frac{1}{h}[\varphi(x_n(t+h)-x_n(t))]=\varphi(x_n'(t_\varphi)).$$

令$A=\{x_n'(s)\,|\,t\leqslant s\leqslant t+h\}$，则由上式知

$$\frac{1}{h}[\varphi(x_n(t+h)-x_n(t))]\in\varphi(A),\forall\varphi\in E^*. \tag{8.2.5}$$

取$x_0\in A$，令$M=\overline{co}(A-\{x_0\})=\overline{co}(\{y-x_0\,|\,y\in A\})$，则显然$M$是凸闭集，$\theta\in M$。令$z=\frac{1}{h}[x_n(t+h)-x_n(t)]$。设$z-x_0\overline{\in}M$，则由凸集分离定理知存在$\varphi\in E^*$，使$\varphi(z-x_0)>1$，$\varphi(y)\leqslant 1$ ($\forall y\in M$)。由（8.2.5）式知存在$y_0\in A$，使得$\varphi(z)=\varphi(y_0)$，所以$\varphi(z-x_0)=\varphi(y_0-x_0)$。注意到$y_0-x_0\in M$，故得$1<\varphi(z-x_0)=\varphi(y_0-x_0)\leqslant 1$．产生矛盾．所以$z-x_0\in M$。从而对任给$\varepsilon>0$，存在$\{y_i\,|\,1\leqslant i\leqslant n\}\subset$

$A, \alpha_i > 0$，$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$，使得

$$\|z - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\| = \|(z - x_0) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (y_i - x_0)\| < \varepsilon.$$

这表明 $z \in \overline{co} A$，即（8.2.4）式成立。

由（8.2.3）和（8.2.4）两式可得

$$D^+ m(t) \leqslant \lim_{\tau \to 0^+} \sup_{h \in [0,\tau]} \beta(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{co}\{x_n'(s) | s \in [t, t+h]\})$$

$$\leqslant \lim_{\tau \to 0^+} \beta(\overline{co} \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f(s, x_n(s - \varepsilon_n)) | s \in [t, t+\tau]\})$$

$$= \lim_{\tau \to 0^+} \beta(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{f(s, x_n(s - \varepsilon_n)) | s \in [t, t+\tau]\})$$

$$\leqslant \lim_{\tau \to 0^+} \beta(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{f(I \times \{x_n(s - \varepsilon_n) | s \in [t, t+\tau]\})\})$$

$$\leqslant \lim_{\tau \to 0^+} g[\beta(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n(s - \varepsilon_n) | s \in [t, t+\tau]\})]$$

$$\leqslant g \lim_{\tau \to 0^+} [\beta(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n(s - \varepsilon_n) | s \in [t, t+\tau]\})]$$

$$\leqslant g(\beta\{x_n(t - \varepsilon_n) | n = 1, 2, \cdots\}). \qquad (8.2.6)$$

任给$\varepsilon > 0$，由$\{x_n(t)\}$的（强）等度连续性，当n充分大时$\|x_n(t - \varepsilon_n) - x_n(t)\| < \varepsilon$，从而由定理8．2．1（viii）可知$\beta(\{x_n(t - \varepsilon_n) - x_n(t)\}) \leqslant 2\varepsilon$。令$\varepsilon \to 0$，有$\beta(\{x_n(t - \varepsilon_n) - x_n(t)\}) = 0$．因为

$$\{x_n(t - \varepsilon_n)\} = \{x_n(t - \varepsilon_n) - x_n(t) + x_n(t)\}$$

$$\subset\{x_n(t-\varepsilon_n)-x_n(t)\}+\{x_n(t)\}$$

所以由定理8.2.1（vi），可得

$$\beta\{x_n(t-\varepsilon_n)\}\leqslant\beta\{x_n(t-\varepsilon_n)-x_n(t)\}+\beta\{x_n(t)\}=\beta\{x_n(t)\}.$$

同理$\beta\{x_n(t)\}\leqslant\beta\{x_n(t-\varepsilon_n)\}$，故$\beta\{x_n(t)\}=\beta\{x_n(t-\varepsilon_n)\}$.

由（8.2.6）式可知$D^+m(t)\leqslant g(m(t))(\forall t\in[t_0,t_0+a])$.从而$m(t)\equiv 0$.证完.□

注意到在自反空间中，任何有界集的弱非紧性测度均为0，故由定理8.2.2可知下列结论成立：

系8.2.1 设E是自反空间，$f(t,x)$：$R_0\to E$是弱弱连续的，$\|f(t,x)\|\leqslant M(\forall(t,x)\in R_0)$. 令$a=\min\left\{a,\dfrac{b}{M}\right\}$，则初值问题（8.1.1）存在至少一个定义在$I$上的解.

注8.2.1 当E不是自反空间时，系8.2.1的结论可能不成立.其例子可见Faulkner〔1〕.

8.3 弱耗散型条件

为了在弱拓扑下讨论Banach空间微分方程初值问题，需要引进弱耗散型条件.

定义8.3.1 设f：$R_0\to E$. 如果对任给$t\in[t_0,t_0+a]$，$x,y\in B(x_0,b)$，以及任给$\varphi\in E^*$，$\|\varphi\|=1$，都有

$$\overline{\lim_{h\to0^+}}\frac{1}{h}[|\varphi(x-y+hf(t,x)-h(t,y))|-|\varphi(x-y)|]$$

$$\leqslant g(t,|\varphi(x-y)|),\tag{8.3.1}$$

这里$g\in C[[t_0,t_0+a]\times[0,2b],R_+]$，并且$u(t)\equiv 0$是初值问题$u'=g(t,u)$，$u(t_0)=0$在$[t_0,t_0+a]$上的唯一解，则称$f$在

R_0上满足弱耗散性条件。

定理8.3.1 设E是弱序列完备的.设$f(t,x)$在R_0上是弱弱一致连续的，$\|f(t,x)\|\leqslant M(\forall(t,x)\in R_0)$,并且在$R_0$上满足弱耗散型条件.则初值问题（8.1.1）在$[t_0,t_0+\alpha]$上具有唯一解，这里$\alpha=\min\left\{a,\frac{b}{M}\right\}$.

证 设$\{x_n(t)\}$如定理8.1.3所述.我们证明$\{x_n(t)\}$是弱柯西列，即对任给$\varepsilon^*>0$，$\varphi\in E^*$,都存在N，使得当m，$n\geqslant N$时$|\varphi(x_m(t)-x_n(t))|<\varepsilon^*$.

对充分小的$\varepsilon>0$，初值问题$u'=g(t,u)+\varepsilon$，$u(t_0)=\varepsilon$的最大解$r(t,\varepsilon)$满足$\lim\limits_{\varepsilon\to 0} r(t,\varepsilon)=0$（关于$t\in[t_0,t_0+\alpha]$一致）.取$\varepsilon>0$，使$\varepsilon<\varepsilon_1$（$\varepsilon_1$如定理8.1.3中所述），$r(t,\varepsilon)<\varepsilon^*$.由$f$的弱弱一致连续性，存在$\delta>0$及$\varphi_i\in E^*$，$(1\leqslant i\leqslant p)$，使得只要$|t-s|<\delta$,$|\varphi_i(x-y)|<\delta(1\leqslant i\leqslant p)$，就有$|\varphi(f(t,x)-f(s,y))|<\frac{\varepsilon}{2}$.由$\{x_n(t)\}$的等度连续性，存在$\delta_i>0$，使得只要$|t-s|<\delta_i$，就有$|\varphi_i(x_n(t)-x_n(s))|<\delta$.令$\delta^*=\min\{\delta_i|1\leqslant i\leqslant p\}$.取整数$n$，使当$n\geqslant N$时$\varepsilon_n<\delta^*$($\varepsilon_n$如定理8.1.3中所述).设$m$，$n\geqslant N$，定义$m(t)=|\varphi(x_n(t)-x_m(t))|$.则有

$$D^+m(t)=\overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{1}{h}[m(t+h)-m(t)]$$

$$\leqslant\overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{1}{h}[|\varphi(x_n(t)-x_m(t)+h(f(t,x_n(t))-f(t,x_m(t))))|-|\varphi(x_n(t)-x_m(t))|]$$

$$+\overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{1}{h}[|\varphi(x_n(t+h)-x_m(t+h))-\varphi(x_n(t)-x_m(t)+h(f(h,x_n(t))-f(t,x_m(t))))|]$$

$$\leqslant g(m(t))+\overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{1}{h}|\varphi(x_n(t+h)-x_n(t)-hf(t,x_n(t)))|$$

$$+\overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{1}{h}|\varphi(x_m(t+h)-x_m(t)-hf(t,x_m(t)))|.$$

但是,

$$\overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{1}{h}|\varphi(x_n(t+h)-x_n(t)-hf(t,x_n(t)))|$$

$$\leqslant\overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{1}{h}|\varphi(x_n(t+h)-x_n(t)-hf(t,x_n(t-\varepsilon_n)))|$$

$$+\overline{\lim_{h\to 0^+}}|\varphi(f(t,x_n(t-\varepsilon_n))-f(t,x_n(t)))|$$

$$\leqslant 0+\frac{\varepsilon}{2};$$

$$\overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{1}{h}|\varphi(x_m(t+h)-x_m(t)-hf(t,x_m(t)))|\leqslant\frac{\varepsilon}{2},$$

所以$D^+m(t)\leqslant g(m(t))+\varepsilon$，从而$m(t)\leqslant r(t,\varepsilon)<\varepsilon^*$。所以$\{x_n(t)\}$是弱柯西列。由于$E$是弱序列完备的，故$x_n(t)$在$[t_0,t_0+\alpha]$上弱收敛于某$x(t)$。根据定理8.1.4，$x(t)$是初值问题（8.1.1）的解。

设$x(t)$和$y(t)$都是初值问题（8.1.1）的解。任给$\varphi\in E^*$，

令$p(t)=|\varphi(x(t)-y(t))|$.则

$$D^+p(t)=\overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{1}{h}[p(t+h)-p(t)]$$

$$\leqslant\overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{1}{h}[|\varphi(x(t)-y(t)+h(f(t,x(t))-f(t,y(t))))|-|\varphi(x(t)-y(t))|]$$

$$+\overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{1}{h}|\varphi(x(t+h)-x(t)-hf(t,x(t)))|$$

$$+\overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{1}{h}|\varphi(y(t+h)-y(t)-hf(t,y(t)))|$$

$$\leqslant g(t,p(t)).$$

所以$0\leqslant p(t)\leqslant 0$，从而$p(t)\equiv 0$．由于$\varphi$的任意性，故有$x(t)\equiv y(t)$.即初值问题（8．1．1）的解是唯一的.□

8.4 最大解和最小解

在本节中，设P是Banach空间E中的一个体锥.

定理8.4.1 设f：$[t_0,t_0+a]\times E\to E$是弱弱连续的，$u,v\in C[[t_0,t_0+a],E]$是弱可微的.设对每一个$t\in[t_0,t_0+a]$，f关于x是拟增的，又设

$$u(t_0)\ll v(t_0), \tag{8.4.1}$$

$$u'(t)\leqslant f(t,u(t)),\ t\in[t_0,t_0+a], \tag{8.4.2}$$

$$v'(t)\gg f(t,v(t)),\ t\in[t_0,t_0+a], \tag{8.4.3}$$

这里$u'(t)$和$v'(t)$分别表示$u(t)$和$v(t)$的弱导数．则

$$u(t)\ll v(t),t\in[t_0,t_0+a]. \tag{8.4.4}$$

证 设定理的结论不成立，令

$$Z=\{t\in[t_0,t_0+a]\,|\,u(t)\ll v(t)\text{不成立}\},$$

则$Z\neq\phi$。令$t_1=\inf Z$，则由$u,v\in C[[t_0,\ t_0+a]\ ,E]$知$t_0<t_1$，并且对$t\in[t_0,t_1)$，$u(t)\ll v(t)$。因此，对一切$\varphi\in P^*$，都有

$$\varphi(u(t))<\varphi(v(t)),t\in[t_0,t_1). \tag{8.4.5}$$

显然$v(t_1)-u(t_1)\in\partial P$，根据引理5.3.1(ii)，存在$\varphi_0\in P^*$，使得$\varphi_0(u(t_1))=\varphi_0(v(t_1))$。由$f$的拟增性，可知

$$\varphi_0(f(t_1,u(t_1))\leqslant\varphi_0(f(t_1,v(t_1)). \tag{8.4.6}$$

另一方面，由（8.4.5）式可知，当$h<0$，$|h|$充分小时有

$$\varphi_0\left(\frac{1}{h}[u(t_1+h)-u(t_1)]\right)>\varphi_0\left(\frac{1}{h}[v(t_1+h)-v(t_1)]\right).$$

令$h\to0^-$，可得$\varphi_0(u'(t_1))\geqslant\varphi_0(v'(t_1))$。利用（8.4.2）(8.4.3) 两式，有

$$\varphi_0(g(t_1,u(t_1))\geqslant\varphi_0(u'(t_1))\geqslant\varphi_0(v'(t_1))>\varphi_0(g(t_1,v(t_1)).$$

此与 (8.4.6) 式矛盾.□

定理8.4.2 在定理8.2.2 的条件下，初值问题 (8.1.1) 必存在定义在$[t_0,t_0+\alpha]$上的最大解和最小解，其中

$$\alpha=\min\left\{a,\frac{b}{2M+b}\right\}.$$

证 我们只需证明最大解的存在性。取$y_0\in\text{int}P$，$\|y_0\|<\frac{b}{2}$，考虑初值问题

$$\begin{cases} x' = f(t,x) + \frac{1}{n} y_0, \\ x(t_0) = x_0 + \frac{1}{n} y_0. \end{cases} \tag{8.4.7}$$

因为$f_n(t, x) = f(t, x) + \frac{1}{n} y_0$在$R_n = \left\{(t,x) \,\middle\|\, t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + a, \left\| x - \left(x_0 + \frac{1}{n} y_0 \right) \right\| \leqslant \frac{b}{2} \right\}$上有定义，并且弱弱连续；$R_n \subset R_0$，在$R_n$上$\|f_n(t, x)\| \leqslant M + \frac{b}{2}$，并且

$$\beta(f_n(I \times A)) = \beta\left(f(I \times A) + \frac{1}{n} y_0\right) = \beta(f(I \times A))$$

$$\leqslant g(\beta(A)), \ \forall A \subset B\left(x_0 + \frac{1}{n} y_0, \ \frac{b}{2}\right).$$

所以根据定理8.2.2，初值问题（8.4.7）有定义在$[t_0, t_0 + \alpha]$$\left(这里\ \alpha = \min\left\{a, \frac{b}{2M+b}\right\}\right)$的解$x_n(t)$。

考察函数族$\{x_n(t)\}$。对任给$0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \alpha$，由Hahn-Banach延拓定理，知存在$\varphi \in E$，$\|\varphi\| = 1$，使

$$\|x_n(t_2) - x_n(t_1)\| = \varphi(x_n(t_2) - x_n(t_1)),$$

所以

$$\|x_n(t_2) - x_n(t_1)\| = \int_{t_1}^{t_2} \varphi\left(f(s, x_n(s)) + \frac{1}{n} y_0\right) ds$$

$$\leqslant \left(M + \frac{b}{2}\right)|t_2 - t_1|, \tag{8.4.8}$$

从而$\{x_n(t)\}$是（强）等度连续函数族。令$m(t) = \beta(\{x_n(t)\})$，则仿

定理8.2.2同样的证明方法，可以证明$m(t)\equiv 0$，从而根据定理8.1.2，$\{x_n(t)\}$必有子列，不失一般可以假定就是$\{x_n(t)\}$本身，在$[t_0,t_0+\alpha]$上弱收敛于$r(t)$。用与8.1.4类似的证明方法可知$r(t)$是初值问题（8.1.1）的解。

设$x(t)$是初值问题的任意一解．用（8.4.8）式的证明方法可知$r(t),x(t)\in C[[t_0,t_0+\alpha],E]$．又

$$x(t_0)=x_0\ll x_0+\frac{1}{n}y_0,$$

$$x'(t)=f(t,x(t)),$$

$$x_n'(t)=f(t,x_n(t))+\frac{1}{n}y_0\gg f(t,x_n(t)),$$

故由定理8.4.1，有$x(t)\ll x_n(t)$（$\forall t\in[t_0,t_0+\alpha]$）。令$n\to\infty$，并注意到$P$是弱序列闭的，故有$x(t)\leqslant r(t)$。□

8.5 附　　注

定理8.1.3和定理8.1.4是Szep〔1〕中证明的．本章的其它结论均选自Cramer，Lakshmıkantham和Mitchell〔1〕。与本章内容有关的进一步讨论可见Zigler〔1〕和Agase〔1〕。

第九章　Banach空间中的两点边值问题

在本章中，我们将研究 Banach 空间中的二阶非线性常微分方程两点边值问题。

9.1　紧型条件下的存在性定理

为了讨论Banach 空间二阶非线性常微分方程两点边值问题解的存在性，需要对非紧性测度作某些进一步的讨论。

设E是Banach空间，$\alpha(\cdot)$表E中的非紧性测度。

引理9.1.1　设S是R^1中的有界集，B是E中的有界集，令$S\cdot B=\{sb\mid s\in S,\ b\in B\}$，则

$$\alpha(S\cdot B)=(\sup_{t\in S}|t|)\alpha(B). \tag{9.1.1}$$

证　对每个$t\in S$，$\alpha(S\cdot B)\geqslant\alpha(t\cdot B)=|t|\alpha(B)$，所以

$$\alpha(S\cdot B)\geqslant(\sup_{t\in S}|t|)\alpha(B).$$

另一方面，对任给$\varepsilon>0$，存在$t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n\in S$，使得对每个$a\in S$，都有某个$t_j(1\leqslant j\leqslant n)$，满足$|a-t_j|<\frac{\varepsilon}{M}$，其中$M=\sup_{x\in B}\|x\|$。又根据非紧性测度的定义，存在$S_1,\ S_2,\ \cdots,\ S_m\subset E$，使得 $\operatorname{diam}(S_i)<\alpha(B)+\varepsilon$，$B\subset\bigcup_{i=1}^{m}S_i$。定义

$$T_{ij}=\{x\in E\mid \text{对某}b\in S_i,\ \|x-t_jb\|<\varepsilon\}.$$

任给$a\in S$，$b\in B$，存在t_j及$b\in S_i$，使$|a-t_j|<\varepsilon M^{-1}$，所以

$$\|ab-t_jb\|=|a-t_j|\,\|b\|<\varepsilon.$$

这表明$S\cdot B\subset\bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{n}T_{ij}$，对任给$x,y\in T_{ij}$，有

$$\begin{aligned}\|x-y\|&\leqslant\|x-t_jb_x\|+\|t_jb_x-t_jb_y\|+\|t_jb_y-y\|\\&\leqslant\varepsilon+|t_j|\,\|b_x-b_y\|+\varepsilon\\&\leqslant(\sup_{t\in S}|t|)\alpha(B)+2\varepsilon\end{aligned}$$

其中b_x，$b_y\in S_i$满足$\|x-t_jb_x\|<\varepsilon$，$\|y-t_jb_y\|<\varepsilon$。因此$\alpha(S\cdot B)\leqslant(\sup_{t\in S}|t|)\alpha(B)$。□

引理9.1.2 设E，F都是Banach空间，A，B分别是E，F中的有界开集，E,F，$E\times F$中的非紧性测度均用$\alpha(\cdot)$表示，$E\times F$中的范数用$\|(x,y)\|=\max\{\|x\|,\ \|y\|\}$定义，则

$$\alpha(A\times B)=\max\{\alpha(A),\ \alpha(B)\}.$$

这一引理很容易由定义直接得出。

令$I=[0,\ 1]$，

$$C^1[I,\ E]=\{\varphi: I\to E\mid \varphi(t)\text{是连续可微的}\}.$$

在$C^1[I,\ E]$中定义范数如下：

$$\|\varphi\|_1=\max\{\sup_{t\in I}\|\varphi(t)\|,\ \sup_{t\in I}\|\varphi'(t)\|\}.$$

对$A\subset C^1[I,\ E]$，我们使用下列记号：

$$A(t)=\{\varphi(t)\mid\varphi\in A\},$$

$$A'(t)=\{\varphi'(t)\mid\varphi\in A\},$$

$$A'=\{\varphi'\mid\varphi\in A\},$$

$$A(I)=\{\varphi(t)\mid\varphi\in A,\ t\in I\},$$

$$A'(I)=\{\varphi'(t)\mid\varphi\in A,\ t\in I\}.$$

对于E和$C^1[I, E]$上的非紧性测度，我们都用$\alpha(\cdot)$表示。

引理9.1.3 设A是$C^1(I, E)$中的有界集，则

$$\alpha(A)\geqslant\max\{\sup_{t\in I}\alpha(A(t)),\ \sup_{t\in I}\alpha(A'(t))\} \quad (9.1.2)$$

证 任给$\varepsilon>0$,由$\alpha(A)$的定义知存在$T_1, \cdots, T_k\subset C^1(I,E]$,使$A\subset\bigcup_{i=1}^{k}T_i$, $\operatorname{diam}T_i<\alpha(A)+\varepsilon \quad (1\leqslant i\leqslant k)$。对$t_0\in I$,有

$$A(t_0)\subset\bigcup_{i=1}^{k}T_i(t_0),\quad A'(t_0)\subset\bigcup_{i=1}^{k}T_i'(t_0).$$

注意到$\operatorname{diam}T_i(t_0)<\alpha(A)+\varepsilon$, $\operatorname{diam}T_i'(t_0)<\alpha(A)+\varepsilon$,故有$\alpha(A(t_0))<\alpha(A)+\varepsilon$, $\alpha(A'(t_0))<\alpha(A)+\varepsilon$。注意到$\varepsilon>0$和$t_0\in I$的任意性,故(9.1.2)式成立.□

引理9.1.4 设A是$C^1[I, E]$中的等度连续的有界集，则

$$\alpha(A)\geqslant\alpha(A(I)),\quad \alpha(A)\geqslant\frac{1}{2}\alpha(A'(I)). \quad (9.1.3)$$

证 任给$\varepsilon>0$,由$\alpha(A)$的定义知存在$S_1,\cdots,S_k\subset C^1[I,E]$,使$A\subset\bigcup_{i=1}^{k}S_i$, $\operatorname{diam}S_i<\alpha(A)+\varepsilon(1\leqslant i\leqslant k)$。因为$A$是等度连续的,所以存在$0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1$,使得对$t\in[t_j,t_{j+1}]$和$\varphi\in A$,有$\|\varphi(t)-\varphi(t_j)\|<\varepsilon$。令

$$T_{ij}=\{x\in E\mid 对某\varphi\in S_i,\ \|x-\varphi(t_j)\|<\varepsilon\}.$$

若$x,y\in T_{ij}$, 则

$$\begin{aligned}\|x-y\|&\leqslant\|x-\varphi(t_j)\|+\|\varphi(t_j)-\psi(t_j)\|+\|\psi(t_j)-y\|\\&\leqslant\varepsilon+(\alpha(A)+\varepsilon)+\varepsilon=\alpha(A)+3\varepsilon,\end{aligned}$$

其中φ, $\psi\in S_i$满足$\|x-\varphi(t_j)\|<\varepsilon$, $\|y-\psi(t_j)\|<\varepsilon$。从而有$\operatorname{diam}T_{ij}<\alpha(A)+3\varepsilon$。此外,若$\varphi\in A,t\in I$，则不失一般可假定$t\in[t_j,t_{j+1}]$,$\varphi\in S_i$,从而$\varphi(t)\subset T_{ij}$。这表明

$$A(I)\subset\bigcup_{i=1}^{k}\bigcup_{j=0}^{n-1}T_{ij}.$$

因此，$\alpha(A(I))\leqslant\alpha(A)+3\varepsilon$。令$\varepsilon\to0$，得$\alpha(A(I))\leqslant\alpha(A)$。

对每个$i(1\leqslant i\leqslant k)$，取$\varphi_i\in S_i$，则$\{\varphi_i|i=1,2,\cdots,k\}$是等度连续的，从而存在$0=\tau_0<\tau_1<\cdots<\tau_m=1$，使得只要$t,s\in[\tau_j,\tau_{j+1}]$，就有 $\|\varphi_i'(s)-\varphi_i'(t)\|<\varepsilon(1\leqslant i\leqslant k)$。令$V_{ij}=\{\varphi'(t)|\varphi\in S_i,t\in[\tau_j,\tau_{j+1}]\}$。若$\varphi'(s)$，$\psi'(t)\in V_{ij}$，则

$$
\begin{aligned}
\|\varphi'(s)-\psi'(t)\|\leqslant&\|\varphi'(s)-\varphi_i'(s)\|\\
&+\|\varphi_i'(s)-\psi_i'(t)\|+\|\psi_i'(t)-\psi(t)\|\\
\leqslant&2\alpha(A)+\varepsilon. \qquad (9.1.4)
\end{aligned}
$$

注意到若$\varphi\in A,t\in I$，则φ必属于某S_i，而t必属于某$[\tau_j,\tau_{j+1}]$，从而$\varphi'(t)\in T_{ij}$。所以由(9.1.4)式可知必有

$$\alpha(A'(I))\leqslant2\alpha(A).\square$$

引理9.1.5 设A是$C^1[I,E]$中的有界集，A'是等度连续的，则

$$\alpha(A)=\max\{\sup_{t\in I}\alpha(A(t)),\ \sup_{t\in I}\alpha(A'(t))\}. \qquad (9.1.5)$$

证 因为A'是等度连续的，故A也是等度连续的。任给$\varepsilon>0$，存在$0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1$，使得当$t\in[t_i,t_{i+1}]$ $(i=0,1,\cdots,n-1)$，$\varphi\in A$时有

$$\|\varphi(t)-\varphi(t_i)\|<\varepsilon,\ \|\varphi'(t)-\varphi'(t_i)\|<\varepsilon.$$

令 $d=\alpha\left(\bigcup_{i=0}^{n-1}[A(t_i)\cup A'(t_i)]\right)$，则存在$S_1$，…，$S_k\subset E$，使得

$$\bigcup_{i=0}^{n-1}[A(t_i)\cup A'(t_i)]\subset\bigcup_{j=1}^{k}S_j,$$

$$\operatorname{diam}S_j<d+\varepsilon,\quad 1\leqslant j\leqslant k.$$

令Φ是映$\{0,1,\cdots,n-1\}$到$\{1,2,\cdots,k\}$ 的所有映射组成的映射族，则Φ是有限集合。对$f,g\in\Phi$，定义

$$T_{f,g}=\{\varphi\in A|\varphi(t_i)\in S_{f(i)},\ \varphi'(t_i)\in S_{g(i)},$$

对$i=0,1,2,\cdots,n-1\}$.

如果$\varphi,\psi\in T_{fg}$，$t\in I$，则存在$0\leqslant i\leqslant n-1$，使$t\in[t_i, t_{i+1}]$，从而$\varphi(t_i),\psi(t_i)\in S_{f(i)}$，$\varphi'(t_i),\psi'(t_i)\in S_{g(i)}$. 于是

$$\|\varphi(t)-\psi(t)\|\leqslant\|\varphi(t)-\varphi(t_i)\|+\|\varphi(t_i)-\psi(t_i)\| +\|\psi(t_i)-\psi(t)\|\leqslant\varepsilon+(d+\varepsilon)+\varepsilon;=d+3\varepsilon;$$

$$\|\varphi'(t)-\psi'(t)\|\leqslant\|\varphi'(t)-\varphi'(t_i)\|+\|\varphi'(t_i)-\psi'(t_i)\| +\|\psi'(t_i)-\psi'(t)\|\leqslant\varepsilon+(d+\varepsilon)+\varepsilon=d+3\varepsilon.$$

故$\|\psi-\varphi\|_1<d+3\varepsilon$，从而 $\operatorname{diam}T_{f,g}\leqslant d+3\varepsilon$. 因此，注意到$A\subset\bigcup\limits_{f,g\in\Phi}T_{f,g}$，我们有

$$\begin{aligned}\alpha(A)&\leqslant d+3\varepsilon=\alpha\Big(\bigcup_{i=0}^{n-1}(A(t_i)\cup A'(t_i))\Big)+3\varepsilon\\&\leqslant\max_{0\leqslant i\leqslant n-1}\{\alpha(A(t_i)),\alpha(A'(t_i))\}+3\varepsilon\\&\leqslant\max\{\sup_{t\in I}\alpha(A(t)),\ \sup_{t\in I}\alpha(A'(t))\}+3\varepsilon.\end{aligned}$$

令$\varepsilon\to0$，并注意到引理9.1.3，即知(9.1.5)式成立. □

本节中还需要下列不动点定理. 这一不动点定理的证明见郭大钧[1].

定理9.1.1 设S是Banach空间E中的有界凸闭集，T：$S\to S$是连续映射，并存在$0\leqslant\beta<1$，使对S中的一切子集A，都有

$$\alpha(TA)\leqslant\beta\alpha(A). \tag{9.1.6}$$

则T在S中必有不动点.

下面我们考察Banach空间中的二阶非线性常微分方程两点边值问题

$$x''=f(t,\ x,\ x'), \tag{9.1.7}$$

$$\begin{cases}ax(0)-bx'(0)=x_0,\\cx(1)+dx'(1)=x_1,\end{cases} \tag{9.1.8}$$

其中假定 $f\in C[I\times E\times E,\ E](I=[0,1])$，$x_0\in E$，$x_1\in E$，$a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$，$c\geqslant 0$，$d\geqslant 0$，$ad+bc>0$。

设$G(t,s)$是R^1中的二阶线性常微分方程边值问题

$$y''=h(t), \tag{9.1.9}$$

$$\begin{cases} ay(0)-by'(0)=0 \\ cy(1)+dy'(1)=0 \end{cases} \tag{9.1.10}$$

的Green函数；设ψ是

$$\psi''=0, \tag{9.1.11}$$

$$\begin{cases} a\psi(0)-b\psi'(0)=x_0 \\ c\psi(1)+d\psi'(1)=x_1 \end{cases} \tag{9.1.12}$$

的解（它是唯一存在的）.令

$$M_1=\max\{1,\max_{(t,s)\in I\times I}|G(t,s|\}, \tag{9.1.13}$$

$$M_2=\max_{(t,s)\in I\times I}|G_t'(t,s)| \tag{9.1.14}$$

$$M_3=\max_{t\in I}\|\psi(t)\|, \tag{9.1.15}$$

$$M_4=\max_{t\in I}\|\psi'(t)\|. \tag{9.1.16}$$

定理9.1.2 设(i)$f\in C[I\times E\times E,\ E]$，并且对$E$中的一切有界集$A,B$，都有

$$\alpha(f(I\times A\times B))\leqslant k\max\{\alpha(A),\alpha(B)\}, \tag{9.1.17}$$

其中$k\geqslant 0$为一常数；

(ii)存在$L>0$，使得对任给$(t,x,y)\in I\times E\times E$，有

$$\|f(t,\ x,\ y)\|\leqslant L; \tag{9.1.18}$$

(iii) $k<\dfrac{1}{2M_1}$.

则边值问题(9.1.7)和(9.1.8)至少有一个解$x\in C^2[I,E]$.

证 定义$T: C^1[I,E]\to C^1[I,E]$如下：

$$T\varphi(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,\varphi(s),\varphi'(s))ds+\psi(t).\quad (9.1.19)$$

仿有限维空间的情况，可以证明边值问题(9.1.7)、(9.1.8)的属于$C^2[I,E]$的解与T的不动点是等价的。

令

$$D=\{\varphi\in C^1[I,E]\mid \max_{t\in I}\|\varphi(t)\|\leqslant M_1L+M_3,$$

$$\max_{t\in I}\|\varphi'(t)\|\leqslant M_2L+M_4\},$$

则显然D是$C^1[I,E]$中的有界凸闭集，$T(D)\subset D$，并且T是连续的．如果我们能够证明：

$$\alpha(T(A))\leqslant 2M_1k\alpha(A),\ \forall A\subset D,\quad (9.1.20)$$

那么根据定理9.1.1，T必定有不动点，并且T的不动点就是边值问题(9.1.7)、(9.1.8)的解．下面我们证明(9.1.20)式成立。

任给$A\subset D$，当$\varphi\in A$时

$$(T\varphi)''(t)=f(t,\varphi(t),\varphi'(t)),$$

从而由(9.1.18)式可知$\max_{t\in I}\|(T\varphi)''(t)\|\leqslant L$．这表明$(TA)'$等度连续的．根据引理9.1.5，对任给$\varepsilon>0$，必存在$t_1\in I$或$t_2\in I$，使得下列两式之一成立：

$$\alpha(T(A))\leqslant\alpha(TA(t_1))+\varepsilon,\quad (9.1.21)$$

$$\alpha(T(A))\leqslant\alpha((TA)'(t_2))+\varepsilon.\quad (9.1.22)$$

先设(9.1.21)式成立，则有

$$\alpha(T(A))\leqslant\alpha(TA(t_1))+\varepsilon$$

$$=\alpha\left(\left\{\int_0^1 G(t_1,s)f(s,\varphi(s),\varphi'(s))ds+\psi(t_1)\mid\varphi\in A\right\}\right)+\varepsilon$$

$$=\alpha\left(\left\{\int_0^1 G(t_1,s)f(s,\varphi(s),\varphi'(s))ds\,|\,\varphi\in A\right\}\right)+\varepsilon$$

$$\leqslant\alpha(\overline{CO}\{G(t_1,s)f(s,\varphi(s),\varphi'(s))\,|\,\varphi\in A,s\in I\})+\varepsilon$$

$$=\alpha(\{G(t_1,s)f(s,\varphi(s),\varphi'(s))\,|\,\varphi\in A,\ s\in I\})+\varepsilon,$$

再利用引理9.1.1及假设(i)，可得

$$\alpha(TA)\leqslant(\max_{s\in I}|G(t_1,s)|)\alpha(\{f(s,\varphi(s),\varphi'(s))\,|\,\varphi\in A,s\in I\})+\varepsilon$$

$$\leqslant M_1\alpha(\{f(s,\varphi(s),\varphi'(s))\,|\,\varphi\in A,s\in I\})+\varepsilon$$

$$\leqslant M_1\alpha(f(I\times A(I)\times A'(I)))+\varepsilon$$

$$\leqslant M_1 k\max\{\alpha(A(I)),\alpha(A'(I))\}+\varepsilon.$$

应用引理9.1.4，由上式可得

$$\alpha(TA)\leqslant M_1 k\max\{\alpha(A),2\alpha(A)\}+\varepsilon$$

$$=2M_1 k\alpha(A)+\varepsilon.$$

令$\varepsilon\to0$，即知(9.1.20)式成立.

再设(9.1.22)式成立，则有

$$\alpha(TA)\leqslant\alpha((TA)'(t_2))+\varepsilon$$

$$=\alpha\left(\left\{\int_0^1 G_t'(t_2,s)f(s,\varphi(s),\varphi'(s))ds+\psi'(t_2)\,|\,\varphi\in A\right\}\right)+\varepsilon$$

$$=\alpha\left(\left\{\int_0^1 G_t'(t_2,s)f(s,\varphi(s),\varphi'(s))ds\,|\,\varphi\in A\right\}\right)+\varepsilon$$

$$\leqslant\alpha(\overline{CO}\{G_t'(t_2,s)f(s,\varphi(s),\varphi'(s))ds\,|\,\varphi\in A,s\in I\})+\varepsilon$$

$$=\alpha(\{G_t'(t_2,s)f(s,\varphi(s),\varphi'(s))ds\,|\,\varphi\in A,s\in I\})+\varepsilon.$$

利用引理9.1.1及假设(i)，并注意到

$$M_2=\max_{(t,s)\in I\times I}|G_t'(t,s)|\leqslant1,$$

我们有

$$\alpha(TA)\leqslant(\max_{s\in I}|G_t'(t,s)|)\cdot$$

$$\alpha(\{f(s,\varphi(s),\varphi'(s))\,|\,\varphi\in A,s\in I\})+\varepsilon$$

$$\leqslant\alpha(\{f(s,\varphi(s),\varphi'(s))\mid\varphi\in A,s\in\dot{I}\})+\varepsilon$$

$$\leqslant\alpha(f(I\times A(I)\times A'(I)))+\varepsilon$$

$$\leqslant k\max\{\alpha(A(I)),\alpha(A'(I))\}+\varepsilon$$

利用引理1.9.4，由上式可得

$$\alpha(TA)\leqslant k\max\{\alpha(A),2\alpha(A)\}+\varepsilon$$

$$=2k\alpha(A)+\varepsilon\leqslant 2M_1k\alpha(A)+\varepsilon.$$

令$\varepsilon\to 0$，即知(9.1.20)式仍成立.证完.□

注9.1.1 由引理9.1.2可知

$$\alpha(I\times A\times B)=\max\{\alpha(I),\alpha(A),\alpha(B)\}$$

$$=\max\{\alpha(A),\alpha(B)\}.$$

所以定理9.1.2中的(9.1.17)式可以写成

$$\alpha(H(I\times A\times B))\leqslant k\alpha(I\times A\times B). \qquad (9.1.23)$$

定理9.1.3 设定理9.1.2的假设(i)满足.又设存在$M>0$，使得当$t\in I$，$x\in E,y\in E$，$\|x\|\leqslant M$，$\|y\|\leqslant M$时有

$$\|f(t,x,y)\|\leqslant\frac{M}{2M_1}$$

则当

$$2M_4\leqslant M,\quad 2M_3\leqslant M,\quad 2kM_1<1$$

时边值问题(9.1.7)、(9.1.8)至少有一个解$x\in C^2[I,E]$.

证 设T由(9.1.19)式定义，我们只需证明T在$C^1[I,E]$中有不动点即可. 令

$$D_1=\{\varphi\in C^1[I,E]\mid\|\varphi\|_1\leqslant M\}.$$

则D_1是$C^1[I,E]$中的有界凸闭集.对$\varphi\in D_1$，有

$$\|T\varphi\|\leqslant\int_0^1|G(t,s|\,\|f(t,\varphi(s),\varphi'(s))\|ds+\|\psi\|$$

$$\leqslant M_1\cdot\frac{M}{2M_1}+M_3\leqslant\frac{M}{2}+\frac{M}{2}=M;$$

$$\|(T\varphi)'(t)\| \leqslant \int_0^1 |G_t'(t,s)| \, \|f(t,\varphi(s),\varphi'(s))\| ds + \|\psi'\|$$

$$\leqslant \frac{M}{2M_1} + M_4 \leqslant \frac{M}{2} + \frac{M}{2} = M.$$

所以$T(D_1) \subset D_1$.由定理9.1.2的证明可知对任给 $A \subset D_1$,(9.1.20)式仍成立.故由定理9.1.1知T在D_1中必有不动点. 证完.□

9.2 比较定理

本节讨论Banach 空间二阶常微分方程两点边值问题的比较定理.

设E是Banach空间, P是E中的锥, E^*是E的共轭空间, P^*是P的共轭锥. 对$\varphi \in P^*$, 令

$$C_\varphi = \{x \in E \mid \varphi(x) \geqslant 0\}.$$

若$S \subset P^*$, 满足

$$P = \cap \{C_\varphi \mid \varphi \in S\},$$

则称P可以由S生成.

下面设$B^* = \{\varphi \in E^* \mid \|\varphi\| \leqslant 1\}$, $I = [0,1]$.

引理9.2.1 设$S \subset B^*$, $u \in C[I,E]$,令

$$\Phi(x) = \inf\{\varphi(u(x)) \mid \varphi \in S\}. \tag{9.2.1}$$

则Φ是I上的实值连续函数.

证 设$x \in I$,$\varepsilon > 0$. 由 (9.2.1) 式可知必存在$\psi \in S$, 使$\psi(u(x)) < \Phi(x) + \frac{\varepsilon}{2}$. 因此, 对$y \in I$, 若$\Phi(x) \leqslant \Phi(y)$, 则有

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| = \Phi(y) - \Phi(x)$$

$$\leqslant\psi(u(y))-\psi(u(x))+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\leqslant\|\psi\|\,|u(y)-u(x)|+\frac{\varepsilon}{2}\leqslant|u(y)-u(x)|+\frac{\varepsilon}{2};$$

当$\Phi(x)\geqslant\Phi(y)$时同样可得$|\Phi(x)-\Phi(y)|\leqslant|u(x)-u(y)|+\frac{\varepsilon}{2}$.从而由$u$的连续性可知$\Phi$是连续的.证完.□

引理9.2.2 设$S\subset B^*$,$u\in E$,令$d=\inf\{\varphi(u)\mid\varphi\in S\}$.则存在$\psi\in\overline{S}^*$($\overline{S}^*$表$S$在$E^*$的弱*拓扑下的闭包),使得$\psi(u)=d$.

证 对固定的$u\in E$,映射$\varphi\to\varphi(u)$在E^*的弱*拓扑下是连续的.注意到$\overline{S}^*$在E^*的弱*拓扑下是紧集,故必存在$\psi\in\overline{S}^*$,使$\psi(u)=d$.证完.□

定理9.2.1 设P是体锥,$S\subset B^*$,使得P可以由S生成.设f:$I\times E\times E\to E$,满足,若$\varphi\in\overline{S}^*$($\overline{S}^*$表S在E^*的弱*拓扑下的闭包),$\varphi(u')=0$,

$$\varphi(u)=\inf\{\psi(u)\mid\psi\in S\}\leqslant 0,$$

就有

$$\varphi(f(t,u,u'))\geqslant 0. \tag{9.2.2}$$

设$u\in C^2[I,E]$,满足

$$u''(t)+f(t,\ u(t),u'(t))\ll 0,\quad t\in[0,1] \tag{9.2.3}$$

并且$u(0)\geqslant 0$,$u(1)\geqslant 0$,则对任给$t\in I$,有$u(t)\geqslant 0$.

证 利用(9.2.1)式定义Φ,则由引理9.2.1知Φ是连续的.由于P可以由S生成,故由$u(0)\geqslant 0$,$u(1)\geqslant 0$可知$\Phi(0)\geqslant 0$,$\Phi(1)\geqslant 0$.为了证明定理的结论,我们只需证明:对任给$t\in I$,有$\Phi(t)\geqslant 0$.

用反证法,设存在$t_0\in(0,1)$,使$\Phi(t_0)<0$.由于Φ的连续

性，我们可以不失一般地假定

$$\Phi(t_0)=\min\{\Phi(t)\mid t\in I\}<0. \qquad (9.2.4)$$

利用引理9.2.2可知必存在 $\psi\in\overline{S}^*$，使$\psi(u(t_0))=\Phi(t_0)$．定义$h(t)=\psi(u(t))$.因为$\psi\in\overline{S}^*$，P可以由S生成（从而P可以由$\overline{S}^*$生成），所以$h(0)\geqslant 0,h(1)\geqslant 0$，

$$h(t_0)=\min\{h(t)\mid t\in I\}=\Phi(t_0)<0$$

于是$h'(t_0)=0$.从而由(9.2.2)式可知

$$\psi(f(t_0,u(t_0),u'(t_0))\geqslant 0.$$

所以，由(9.2.3)式可知

$$h''(t_0)=\psi(u''(t_0))<\psi(-f(t_0,u(t_0),u'(t_0)))\leqslant 0.$$

此与h在t_0处取到最小值矛盾.证完.□

注9.2.1 检查上述定理的证明可知，如果不假定 P 是体锥，而分别把定理9.2.1中的(9.2.2)(9.2.3)两式换成

$$\varphi(f(t,u,u')>0, \qquad (9.2.4)$$

$$u''+f(t,u(t),u'(t))\leqslant 0, \quad t\in I, \qquad (9.2.5)$$

则定理的结论仍成立

设P是体锥，$S\subset B^*$，使得P可以由S生成．设 $u_0\in\mathrm{int}P$，满足

$$\delta=\inf\{\varphi(u_0)\mid\varphi\in S\}>0. \qquad (9.2.6)$$

令

$$S(u_0)=\left\{\varphi\in E^*\ \middle|\ \varphi(u)=\frac{\delta\psi(u)}{\psi(u_0)},\psi\in S,u\in E\right\}. \qquad (9.2.7)$$

则显然$S(u_0)\subset B^*$,P可以由$S(u_0)$生成，并且对任给$\varphi\in S(u_0)$，$\varphi(u_0)=\delta$.

定理9.2.2 设P是体锥，$S\subset B^*$，使P可以由S 生成．设$f(t,u,u')$：$I\times E\times E\to E$，满足

(i)对$(t,u,u'),(t,v,v')\in I\times E\times E$,如果 $\varphi\in\overline{S(u_0)}^*$（其

中 $\overline{S(u_0)}^*$表示$S(u_0)$ 在E^*的弱*拓扑下的闭包)，$\varphi(u'-v')=0$，

$$\varphi(u-v)=\inf\{\psi(u-v)\mid\psi\in S(u_0)\}\leqslant 0,$$

则有

$$\varphi(f(t,u,u'))\geqslant\varphi(f(t,v,v'));\tag{9.2.8}$$

(ii)$f(t,0,0)\geqslant 0$，并且$f(t,u,u')$在$I\times E\times E$的每个有界闭集上关于u'满足Lipschitz条件。

又设存在$u(t)\in C^2[I,E]$，使得

$$u''(t)+f(t,u(t),u'(t))\leqslant 0,\quad t\in I\tag{9.2.9}$$

$$u(0)\geqslant 0,\quad u(1)\geqslant 0.\tag{9.2.10}$$

则对一切$t\in I$，有$u(t)\geqslant 0$。

证 定义

$$\Phi(t)=\inf\{\varphi(u(t))\mid\varphi\in S(u_0)\},\quad t\in I.\tag{9.2.11}$$

显然$\Phi(0)\geqslant 0$，$\Phi(1)\geqslant 0$.设存在$t\in I$，使$\Phi(t)<0$，则由引理9.2.1知Φ在I上是连续的，从而存在$t_0\in(0,1)$，使

$$\Phi(t_0)=\min_{t\in I}\Phi(t)<0.$$

令 $\varepsilon=-\frac{1}{4}\Phi(t_0)$。 令$b=\max_{t\in I}\|u(t)\|$，$D=\{(t,\ u,\ v)\mid t\in I,\ u\in E,\ v\in E,\ \|u\|\leqslant b+\frac{\varepsilon}{\|u_0\|},\ \|v\|=\max_{t\in I}\|u'(t)\|+1\}$，$L$是$f(t,u,u')$相应于$D$的Lipschitz常数。令 $\rho(t)$是R^1中的方程

$$\rho''=(L+I)\rho'\tag{9.2.12}$$

的满足$0\leqslant\rho<\frac{\varepsilon}{\|u_0\|}$，$-1\leqslant\rho'\leqslant -r<0$（$r$为一常数）的解（易知这样的解一定存在）.定义$w$如下

$$w(t)=u(t)+\rho(t)u_0.\tag{9.2.13}$$

在条件(i)中,令$v=v'=\theta$,并利用条件(ii),可知对$\varphi\in\overline{S(u_0)^*}$,若$\varphi(u)=\inf\{\psi(u)\mid\psi\in S(u_0)\}\leqslant 0,\varphi(u')=0$,则有

$$\varphi(f(t,u,u'))\geqslant\varphi(f(t,0,0))\geqslant 0. \qquad (9.2.14)$$

由条件(ii)知对$\varphi\in S(u_0)$,有

$$\begin{aligned}&|\varphi(f(t,u,u'+\rho'u_0)-f(t,u,u'))|\\&\leqslant\|f(t,u,u'+\rho'u_0)-f(t,u,u')\|\\&\leqslant L|\rho'|\|u_0\|. \qquad (9.2.15)\end{aligned}$$

由(9.2.13)式可知对$\varphi\in S(u_0)$,有

$$\varphi(u)-\varphi(w)=-\rho\delta.$$

所以,由条件(i)可知对$\varphi\in S(u_0)$.有

$$\varphi(f(t,w,w')-f(t,u,w'))\leqslant 0. \qquad (9.2.16)$$

利用(9.2.15)和(9.2.16)两式,可知对$\varphi\in S(u_0)$,有

$$\begin{aligned}&\varphi(w''+f(t,w,w'))=\varphi(u''+\rho''u_0+f(t,w,w'))\\&\leqslant\varphi(f(t,w,w')-f(t,u,u')+\rho''\delta\\&\leqslant\varphi(f(t,w,w')-f(t,u,w'))\\&\qquad+\varphi(f(t,u,w')-f(t,u,u'))+\rho''\delta\\&\leqslant L|\rho'|\|u_0\|+(L+1)\rho'\|u_0\|\\&=\rho'\|u_0\|\leqslant -r\|u_0\|<0. \qquad (9.2.17)\end{aligned}$$

由(9.2.14)和(9.2.17)两式,并仿定理9.2.1之证明,即可知(注意$w(0)\geqslant 0$, $w(1)\geqslant 0$)对一切$t\in I$,有$w(t)\geqslant 0$. 但另一方面,

$$\begin{aligned}&\inf\{\varphi(w(t_0))\mid\varphi\in S(u_0)\}\\&\leqslant\Phi(t_0)+\inf\{\varphi(\rho(t_0)u_0)\mid\varphi\in S(u_0)\}\\&=-4\varepsilon+\frac{\varepsilon}{\|u_0\|}\delta\leqslant -3\varepsilon<0.\end{aligned}$$

此与$w(t_0)\geqslant 0$矛盾.证完.□

定理9.2.3 设P是体锥，$S\subset B^*$，使得P可以由S生成. 设$f(t,u,u')$: $I\times E\times E\to E$，满足定理9.2.2的假设(i)，并且在$I\times E\times E$的每个有界闭集上满足Lipschtz条件. 设$u,v\in C^2[I,E]$,满足

$$u''+f(t,u,u')\geqslant v''+f(t,v,v'),\quad t\in I,\qquad (9.2.18)$$

$$u(0)\leqslant v(0),\quad u(1)\leqslant v(1).\qquad (9.2.19)$$

则对任给$t\in I$，有$u(t)\leqslant v(t)$.

证 定义

$$f_1(t,w,w')=u''(t)-v''(t)+f(t,u(t),u'(t))$$
$$-f(t,v(t)-w,\ v'(t)-w).$$

下证f_1满足定理9.2.2中关于f的条件.设$\varphi\in\overline{S(u_0)}^*$,

$$\varphi(w-z)=\inf\{\psi(w)-z)\,|\,\psi\in S(u_0)\}\leqslant 0,$$

$\varphi(w'-z')=0$.则对每个$t\in I$,

$$\varphi([v(t)-z]-[v(t)-w])$$
$$=\inf\{\psi([v(t)-z]-[v(t)-w])\,|\,\psi\in S(u_0)\}\leqslant 0,$$
$$\varphi([v'(t)-z']-[v'(t)-w'])=0,$$

从而由(9.2.8)式可得

$$\varphi(f(t,v(t)-z,\ v'(t)-z')-f(t,v(t)-w,$$
$$v'(t)-w'))\geqslant 0.$$

但注意到

$$f(t,v(t)-z,v'(t)-z')-f(t,v(t)-w,v'(t)-w')$$
$$=f_1(t,w,w')-f_1(t,z,z'),$$

所以 $\varphi(f_1(t,w,w'))\geqslant\varphi(f_1(t,z,z'))$. 即对$f_1$来说，定理9.2.2的假设(i)满足. 类似地，可以证明定理9.2.2的假设(ii)也满足

设$v(t),v(t)\in C^2[I,E]$，满足(9.2.18)和(9.2.19)两式.

令$w(t)=v(t)-u(t)$，则$w(0)\geqslant 0$，$w(1)\geqslant 0$。同时，我们又有

$$w''-f_1(t,w(t),\ w'(t))=v''(t)-u''(t)$$
$$+[u''(t)-v''(t)+f(t,u(t),u'(t))$$
$$-f(t,u(t),u'(t))]=0.$$

根据定理9.2.2，对$t\in I$，有$w(t)\geqslant\theta$，亦即$u(t)\leqslant v(t)$。证完。
□

定理9.2.3在P是体锥，f满足 Lipschitz 型条件下，给出了一个比较定理。下面我们将在不假定P是体锥，也不假定f满足Lipschitz型条件的情况下，给出另一个比较定理。

考察Banach空间两点边值问题

$$u''=f(t,u,u'),\tag{9.2.20}$$

$$\begin{cases}B_0u=\alpha_0u(0)-\beta_0u'(0)=b_0\\ B_1u=\alpha_1u(1)+\beta_1u'(1)=b_1\end{cases}\tag{9.2.21}$$

在本节的其余部分，我们将假定$f\in C[I\times E\times E,E]$，$\alpha_0\geqslant 0$，$\beta_0>0$，$\alpha_1\geqslant 0$，$\beta_1>0$。下面设$P$是E中的一个锥（不假定$P$有内点）．设$S\subset\{\varphi\in P^*\mid\|\varphi\|=1\}$，$P$可以由S生成。令$\overline{S}^*$表示$S$在$E^*$的弱*拓扑下的闭包。

定义9.2.1 如果$x\leqslant y$，并且对任给$\varphi\in S$，只要$\varphi(x)=\varphi(y)$，$\varphi(x')=\varphi(y')$，就有

$$\varphi(f(t,x,x'))\geqslant\varphi(f(t,y,y')),$$

则称$f(t,x,x')$关于P是拟减的。

以后我们将使用下列假定：

(H_1) $f\in C[I\times E\times E,E]$，并且$f$关于$P$是拟减的；

(H_2) $V,W\in C^2[I,E]$，并且对$t\in I$，有

$$V''\geqslant f(t,V,V'),$$
$$B_0V\leqslant b_0,\ B_1V\leqslant b_1;$$

$$W''\leqslant f(t,W,W'),$$
$$B_0W\geqslant b_0,\ B_1W\geqslant b_1;$$

(H_3)存在函数族，$\{z_\lambda(t)|\lambda\geqslant 0\}\subset C^2[I,E]$，使得对任给$t\in I$，$\varphi\in\overline{S}^*$，有

$$\varphi(z_\lambda''(t))<\varphi(f(t,W(t)+z_\lambda(t),W(t)+z_\lambda'(t)))$$
$$-\varphi(f(t,W(t),W'(t))),\qquad(9.2.22)$$
$$B_0z_\lambda>\theta,\quad B_1z_\lambda>\theta,\qquad(9.2.23)$$

其中$\{z_\lambda(t)\}$满足：对每个$t\in I$，$z_\lambda(t)$关于λ连续，$z_0(t)\equiv\theta$，并且对任给$\varphi\in\overline{S}^*$，关于$t\in I$一致有

$$\lim_{\lambda\to 0}\varphi(z_\lambda(t))=0,\quad \lim_{\lambda\to+\infty}\varphi(z_\lambda(t))=+\infty.\qquad(9.2.24)$$

定理9.2.4 设假设$(H_1)(H_2)(H_3)$满足。则

$$V(t)\leqslant W(t),\ \forall t\in I.$$

证 由(9.2.24)式中的第二个极限式可知，对每个$\varphi\in\overline{S}^*$，都存在$\lambda(\varphi)>0$，使

$$\varphi(W(t)+z_{\lambda(\varphi)}(t)-V(t))\geqslant 0,\qquad \forall t\in I.(9.2.25)$$

令 $F_\varphi=\{\delta(\varphi)>0|\varphi(W(t)+z_{\delta(\varphi)}(t)-V(t))\geqslant 0,\quad \forall t\in I\}$，$\eta(\varphi)=\inf F_\varphi$，则

$$\varphi(W(t)+z_{\eta(\varphi)}(t)-V(t))\geqslant 0,\ \forall t\in I.\qquad(9.2.26)$$

定义$m(t)=\inf\limits_{\varphi\in S}\varphi(W(t)-V(t))$，则由引理9.2.1知$m(t)$在$I$上是连续的.注意到$P$可以由S生成，故为证明定理的结论，我们只需证明$m(t)\geqslant 0(\forall t\in I)$。用反证法，设存在$t_0\in I$，使$m(t_0)<0$.不失一般可以假设

$$m(t_0)=\min\{m(t)|t\in I\}<0.$$

根据引理9.2.2，存在$\psi\in\overline{S}_1^*$，使

$$m(t_0)=\psi(W(t_0)-V(t_0)).\qquad(9.2.27)$$

定义

$$h(t)=\psi(W(t)+z_{\eta(\psi)}(t)-V(t)),$$

则显然$\eta(\psi)\neq 0$，并且由$\eta(\psi)$的定义可知 $h(t_0)=0$.若$t_0\in(0,1)$，则必有$h'(t_0)=0$，$h''(t_0)\geqslant 0$.于是

$$\psi(W(t_0)+z_{\eta(\psi)}(t_0)-V(t_0))=0,$$

$$\psi(W'(t_0)+z'_{\eta(\psi)}(t_0)-V'(t_0))=0,$$

$$\psi(W''(t_0)+z''_{\eta(\psi)}(t_0)-V''(t_0))\geqslant 0.$$

利用假设(H_2)、(H_3)，可得

$$\begin{aligned}0&\leqslant\psi(W''(t_0)+z''_{\eta(\psi)}(t_0)-V''(t_0))\\&<\psi(f(t_0,W(t_0)+z_{\eta(\psi)}(t_0),W'(t_0)+z'_{\eta(\psi)}(t_0))\\&\qquad-f(t_0,V(t_0),V'(t_0))).\end{aligned}\tag{9.2.28}$$

但由f的拟减性可知

$$\begin{aligned}&\psi(f(t_0,V(t_0),V'(t_0))\\&\qquad\geqslant\psi(f(t_0,W(t_0)+z_{\eta(\psi)}(t_0),\\&\qquad\quad W'(t_0)+z'_{\eta(\psi)}(t_0)).\end{aligned}\tag{9.2.29}$$

(9.2.28)式和(9.2.29)式是矛盾的.

若$t_0=0$,则

$$\psi(W'(0)+z'_{\eta(\psi)}(0)-V'(0))\geqslant 0,$$

注意到假设(H_2)，可得

$$\psi(B_0z_{\eta(\psi)}(0))\leqslant 0$$

此与(9.2.23)式矛盾.同样，若$t_0=1$，也将导致矛盾. 这表明定理的结论成立. 证完. □

9.3 上下解方法

本节利用上下解方法研究 Banach 空间中的两点边值问题

$$u''=f(t,u,u') \tag{9.3.1}$$

$$\begin{cases} B_0u=\alpha_0u(0)-\beta_0u'(0)=b_0 \\ B_1u=\alpha_1u(1)+\beta_1u'(1)=b_1 \end{cases} \tag{9.3.2}$$

的可解性。本节中将假定 $f\in C[I\times E\times E,E]$ $(I=[0,1])$，$\alpha_0\geqslant 0$，$\beta_0>0$，$\alpha_1\geqslant 0$，$\beta_1>0$；P是E中的锥（不假定有内点），$S\subset\{\varphi\in P^*|\|\varphi\|=1\}$，使$P$可以由$S$生长，$\overline{S}^*$ 表示S在E^*的弱*拓扑下的闭包。

本节中我们将使用9.2节中的假设（H_1）、（H_2）、（H_3），并使用下列假定：

（H_4）存在$h\in C[R_+,P]$，使得对一切$\varphi\in S$，当$t\in I$。$x\in E$，$V(t)\leqslant x\leqslant W(t)$，$x'\in E$时有

$$|\varphi(f(t,x,x'))|\leqslant\varphi(h(|\varphi(x')|)); \tag{9.3.3}$$

（H_5）存在$N\in P$，使得对一切$\varphi\in S$，有

$$\int_{\varphi(\lambda)}^{\varphi(N)}\frac{sds}{\varphi(h(s))}>\max_{t\in I}\varphi(W(t))-\min_{t\in I}\varphi(V(t)), \tag{9.3.4}$$

其中$\varphi(\lambda)=\max\{|\varphi(V(0)-W(1))|,|\varphi(V(1)-W(0))|\}$

引理9.3.1 设假设$(H_1)\sim(H_5)$成立。又设 $x\in C^2[I,E]$ 是边值问题(9.3.1)、(9.3.2)的解，$V(t)\leqslant x(t)\leqslant W(t)$。则对任给$\varphi\in S$，$t\in I$，有

$$|\varphi(x'(t))|\leqslant\varphi(N). \tag{9.3.5}$$

这一引理的证明与有限维空间的证明完全类似，请参见Chandra, Lakshmikantham和Leela[1]。

定理9.3.1 设假设$(H_1)\sim(H_5)$成立。设对E中的任意有界集A,B,都有

$$\alpha(f(I\times A\times B))\leqslant k\max\{\alpha(A),\alpha(B)\}, \tag{9.3.6}$$

其中$\alpha(\cdot)$是非紧性测度，k为一常数。又设

$$2kM_1<1, \tag{9.3.7}$$

其中M_1由(9.1.13)式定义．则边值问题(9.3.1)和(9.3.2)在$C^2[I,E]$中至少有一个解$x(t)$，满足

$$V(t)\leqslant x(t)\leqslant W(t),\forall t\in I. \tag{9.3.8}$$

证 根据定理9.2.4，$V(t)\leqslant W(t)(\forall t\in I)$．由引理9.3.1可知对任给$S$，$t\in I$，有(9.3.5)式成立．取$N_0\in P$，使得对任给$\varphi\in S$，有

$$\varphi(N_0)\geqslant\max\{\varphi(N),\ \max_{t\in I}|\varphi(V'(t))|,\max_{t\in I}|\varphi(W'(t))|\}.$$

取$d\geqslant N_0$．定义$I\times E\times E$上的一个映射F^*如下：对$(t,x,x')\in I\times E\times E$，令

$$F^*(t,x,x')=f(t,x,\overline{x}'), \tag{9.3.9}$$

其中$\overline{x}'$由

$$\varphi(\overline{x}')=\begin{cases}\varphi(d),\text{若}\varphi(x')>\varphi(d),\\ \varphi(x'),\text{若}-\varphi(d)\leqslant\varphi(x')\leqslant\varphi(d),\\ \varphi(-d),\text{若}\varphi(x')<\varphi(-d)\end{cases} \tag{9.3.10}$$

定义，其中φ取遍S，由于P可以由S生成，故易知由(9.3.10)式可以唯一确定E中的一个元素$\overline{x}'$．

利用$F^*(t,x,x')$定义映射$F(t,x,x')$如下：对$(t,x,x')\in I\times E\times E$，$F(t,x,x')$满足对一切$\varphi\in S$，有

$$\varphi(F(t,x,x'))$$

$$=\begin{cases}\varphi(F^*(t,\overline{x},x'))+\dfrac{\eta\varphi(x-W(t))}{1+(\varphi(x))^2},\text{若}\varphi(x)>\varphi(W(t)),\\ \varphi(F^*(t,x,x')),\quad\text{若}\varphi(V(t))\leqslant\varphi(x)\leqslant\varphi(W(t)),\\ \varphi(F^*(t,\overline{x},x'))+\dfrac{\eta\varphi(x-V(t))}{1+(\varphi(x))^2},\quad\text{若}\varphi(x)<\varphi(V(t)),\end{cases}$$

其中$\eta>0$满足

$$2(k+\eta)M_1<1, \tag{9.3.11}$$

$\overline{x}$由

$$\varphi(\overline{x})=\begin{cases}\varphi(W(t)), & 若\varphi(x)>\varphi(W(t)),\\ \varphi(x), & 若\varphi(V(t))\leqslant\varphi(x)\leqslant\varphi(W(t)),\\ \varphi(V(t)), & 若\varphi(x)<\varphi(V(t))\end{cases}$$

定义，显然对每个固定的 $(t,x,x')\in I\times E\times E$，$F(t,x,x')$ 被唯一确定。容易知道，F是连续映射，并且在$I\times E\times E$上是有界的。也容易知道，对E中的每个有界集A和B，都有

$$\alpha(F(I\times A\times B))\leqslant(k+\eta)\max\{\alpha(A),\alpha(B)\}.$$

注意到(9.3.11)式，由定理9.1.2可知边值问题

$$\begin{cases}x''=F(t,x,x')\\ B_0x=\mathrm{b}_0, B_1x=\mathrm{b}_1\end{cases}$$

至少有一个解$x\in C^2[I,\mathrm{E}]$。下证

$$V(t)\leqslant x(t)\leqslant W(t), \forall t\in I. \tag{9.3.12}$$

假设$V(t)\leqslant x(t)$ $(t\in I)$不成立，则根据引理9.2.2，存在$\psi\in\overline{S}^*$及$t_0\in I$，使

$$m(t_0)=\min_{t\in I}m(t)<0,$$

其中$m(t)=\psi(x(t)-V(t))$。若$t_0\in(0,1)$，则必有$m'(t_0)=0$，$m''(t_0)\geqslant0$。于是

$$\psi(x(t_0)-V(t_0))<0,\quad \psi(x'(t_0)-V'(t_0))=0$$
$$\psi(x''(t_0)-V''(t_0))\geqslant0. \tag{9.3.13}$$

由(9.3.5)式可知$|\psi(x'(t_0))|\leqslant\psi(d)$，从而

$$\psi(V''(t_0)-x''(t_0))\geqslant\psi(f(t_0,V(t_0),V'(t_0))$$
$$-F(t_0,x(t_0),x'(t_0)))$$
$$=\psi\Big[f(t_0,V(t_0),V'(t_0))-f(t_0,\overline{x}(t_0),\overline{x'}(t_0))$$

$$+\frac{\eta(V(t_0)-x(t_0))}{1+[\psi(x(x(t_0)))]^2}\Big].$$

注意到 $V(t_0)\leqslant\overline{x}(t_0)$， $\psi(\overline{x}(t_0))=V(t_0))$， $\psi(\overline{x}'(t_0))=\psi(V'(t_0))$，故由$f$的拟减性知

$$\psi(f(t_0,\ \overline{x}(t_0),\overline{x}'(t_0))\leqslant\psi(f(t_0,V(t_0),V'(t_0)),$$

从而

$$\psi(V''(t_0)-x''(t_0))\geqslant\psi\Big[\frac{\eta(V(t_0)-x(t_0))}{1+[\psi(x(t_0))]^2}\Big]>0.$$

此与(9.3.13)式矛盾。

若$t_0=0$，则$m'(t_0)\geqslant0$，即$\psi(x'(0)-V'(0))\geqslant0$。由边值条件$B_0V\leqslant b_0$和$B_0x=b_0$知$\psi(B_0(x'-V'))\leqslant0$。因为$\beta_0>0$，故必有 $\psi(x'(0))=\psi(V'(0))$，从而 $\psi(V''(0)-x''(0))\geqslant0$。仿$t_0\in(0,1)$的情况之证明可知，当$t_0=0$时也导致矛盾。同理可证当$t_0=1$时也导致矛盾。从而 $V(t)\leqslant x(t)(\forall t\in I)$。同理可证 $W(t)\geqslant x(t)(\forall t\in I)$。于是(9.3.12)式成立。这表明

$$x''=F(t,x,x')=f(t,x,\overline{x}').$$

由(H_4)可知对任给$\varphi\in S$，有

$$|\varphi(f(t,x,\overline{x}'))|\leqslant\varphi(h(|\varphi(\overline{x}')|))$$

从而根据引理9.3.1可知 $|\varphi(x'(t))|\leqslant\varphi(N_0)\leqslant d$。因此$F(t,x,x')=f(t,x,x')$。所以$x$也是边值问题(9.3.1)、(9.3.2)的解。□

9.4 多重解

本节考察两点边值问题

$$\begin{cases} -x''=f(t,x), & t\in I; \\ x(0)=x(1)=\theta \end{cases} \tag{9.4.1}$$

的多重解问题，其中$I=[0,1)$，$f\in C[I\times P,P]$，P是实Banach空间E中一个锥，假定

$$f(t,\theta)\equiv\theta,\ t\in I. \tag{9.4.2}$$

从而，$x(t)\equiv\theta$是问题(9.4.1)的平凡解．显然，

$$Q=\{x\in C[I,\mathrm{E}]\mid x(t)\geqslant\theta,t\in I\}$$

是空间$C[I,\mathrm{E}]$中一个锥．函数$x\in C^2[I,\mathrm{E}]$叫做问题(9.4.1)的**正解**，如果它满足(9.4.1)式并且$x\in Q$，$x(t)\neq\theta$.

引理9.4.1 设$f\in C[I\times P,P]$．按下式定义算子A：

$$Ax(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,x(s))ds, \tag{9.4.3}$$

其中

$$G(t,s)=\begin{cases} s(1-t), & s\leqslant t; \\ t(1-s), & s>t. \end{cases} \tag{9.4.4}$$

则$A:Q\to C^2[I,\mathrm{E}]\cap Q$，并且

(a)若 $x\in Q$ 满足 $Ax=x$，那么 $x\in C^2[I,\mathrm{E}]$ 且x 是问题(9.4.1)的解；

(b)若$x\in C^2[I,\mathrm{E}]\cap Q$是问题(9.4.1)的解，那么$Ax=x$.

证明参见郭大钧与Lakshmikantham[2]．

下面，用$T_l=\{x\in\mathrm{E}\mid \|x\|\leqslant l\}$与

$$B_l=\{x\in C[I,\mathrm{E}]\mid \|x\|_C=\max_{t\in I}\|x(t)\|\leqslant l\}\quad (l>0)$$

分别表示空间E与$C[I,\mathrm{E}]$中的闭球．

引理9.4.2 设 $f\in[I\times P,P]$．假定对于任何 $l>0$，f 在$I\times(P\cap T_l)$上一致连续，并且存在常数$0\leqslant L_l<\frac{1}{2}$使得

$$\alpha(f(t,D))\leqslant L_l\alpha(D),\ t\in I,\ D\subset P\cap T_l. \quad (9.4.5)$$

则对任何$l>0$，算子A是$Q\cap B_l$上的严格集压缩算子，亦即存在$0\leqslant k_l<1$使对任何$S\subset Q\cap B_l$，有

$$\alpha(A(S))\leqslant k_l\alpha(S).$$

证 易知，从f在$I\times(P\cap T_l)$上的一致连续性可推出f在其上的有界性，从而，根据第一章系1.1.1以及(9.4.5)式，得

$$\alpha(f(I\times D))=\max_{t\in I}\alpha(f(t,D))\leqslant L_l\alpha(D),$$

$$D\subset P\cap T_l. \quad (9.4.6)$$

因f在$I\times(P\cap T_l)$上有界且一致连续，由(9.4.3)式易知算子A在$Q\cap B_l$上是连续的、有界的。任给$S\subset Q\cap B_l$。由(9.4.3)式知，函数族$\{Ax\mid x\in S\}$是一致有界且等度连续的，于是，根据第一章定理1.1.2知

$$\alpha(A(S))=\sup_{t\in I}\alpha(A(S(t))), \quad (9.4.7)$$

其中

$$A(S(t))=\{Ax(t)\mid x\in S,\ t\text{是固定的}\}\subset P\cap T_l,\ t\in I.$$

利用(9.4.6)式以及显然的公式

$$\int_0^1 x(t)dt\in\overline{co}\{x(t)\mid t\in I\},\ x\in C[I,E]$$

并注意到$0\leqslant G(t,s)\leqslant 1$，我们得

$$\begin{aligned}\alpha(A(S(t)))&\leqslant\alpha(\overline{co}\{G(t,s)f(s,,x(s))\mid s\in I,x\in S\})\\&\leqslant\alpha(\overline{co}\{f(s,x(s))\cup\theta\mid s\in I,x\in S\})\\&\leqslant\alpha(\{f(s,x(s))\cup\theta\mid s\in I,x\in S\})\\&\leqslant\alpha(\{f(s,x(s))\mid s\in I,x\in S\})\\&\leqslant\alpha(f(I\times B))\leqslant L_l\alpha(B),\ t\in I, \quad (9.4.8)\end{aligned}$$

其中$B=\{x(s)\mid s\in I,x\in S\}\subset P\cap T_l$。任给$\varepsilon>0$。存在$S$的分法

$S=\bigcup_{j=1}^{n} S_j$ 使得

$$\operatorname{diam}(S_j)<\alpha(S)+\frac{\varepsilon}{3}, \quad j=1,2,\cdots,n. \qquad (9.4.9)$$

取$x_j\in S_j$ $(j=1,2,\cdots,n)$及I的分法

$$0=t_0<t_1<\cdots<t_i<\cdots<t_m=1,$$

使得

$$\|x_j(t)-x_j(\overline{t})\|<\frac{\varepsilon}{3}, \quad j=1,2,\cdots,n;$$

$$t, \overline{t}\in[t_{i-1}, t_i], \quad i=1,2,\cdots,m. \qquad (9.4.10)$$

显然，$B=\bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{n} B_{ij}$，其中$B_{ij}=\{x(t)\,|\,t\in[t_{i-1}, t_i], x\in S_j\}$.

对于任何 $x(t)$，$\overline{x}(\overline{t})\in B_{ij}$ $(t, \overline{t}\in[t_{i-1}, t_i]$，$x, \overline{x}\in S_j)$，由(9.4.9)式和(9.4.10)式，我们有

$$\begin{aligned}\|x(t)-\overline{x}(\overline{t})\| &\leqslant \|x(t)-x_j(t)\|+\|x_j(t)-x_j(\overline{t})\| \\ &\quad +\|x_j(\overline{t})-\overline{x}(\overline{t})\| \\ &\leqslant \|x-x_j\|_C+\frac{\varepsilon}{3}+\|x_j-\overline{x}\|_C \\ &\leqslant 2\operatorname{diam}(S_j)+\frac{\varepsilon}{3}<2\alpha(S)+\varepsilon,\end{aligned}$$

从而

$$\operatorname{diam}(B_{ij})\leqslant 2\alpha(S)+\varepsilon,$$

于是

$$\alpha(B)\leqslant 2\alpha(S)+\varepsilon.$$

根据ε的任意性，即得

$$\alpha(B)\leqslant 2\alpha(S). \qquad (9.4.11)$$

于是，由(9.4.7)、(9.4.8)以及(9.4.11)三式，得

$$\alpha(A(S))\leqslant 2L_l\alpha(S),\quad S\subset Q\cap B_l.$$

由此，注意到假设条件 $0\leqslant L_l<\frac{1}{2}$，即知$A$是$Q\cap B_l$上的严格集压缩算子．证完．□

引理9.4.3 设K是实Banach空间X中一个锥，

$$K_{r,R}=\{x\in K\mid r\leqslant\|x\|\leqslant R\},\quad R>r>0.$$

假定$A:K_{r,R}\to K$是一个严格集压缩算子，并且下列两条件之一满足：

(a) $Ax\nleqslant x$，$\forall x\in K$，$\|x\|=r$；$Ax\ngeqslant x$，$\forall x\in K$，$\|x\|=R$.

(b) $Ax\ngeqslant x$，$\forall x\in K$，$\|x\|=r$；$Ax\nleqslant x$，$\forall x\in K$，$\|x\|=R$.

则A在$K_{r,R}$中至少具有一个不动点．

证明参见Potter[1]和Cac与Gatica[1].

现在，我们列出以下将要用到的一些条件．

(H_1) $f\in C[I\times P,\ P]$，$f(t,\theta)\equiv\theta$. 对任何$l>0$，f在$I\times(P\cap T_l)$上一致连续，并且存在 $0\leqslant L_l<\frac{1}{2}$使得

$$\alpha(f(t,D))\leqslant L_l\alpha(D),\quad t\in I,\ D\subset P\cap T_l.$$

(H_2)当$x\in P$，$\|x\|\to 0$ 时，$\frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|}$关于$t\in I$一致趋于零．

(H_3) 当$x\in P$，$\|x\|\to+\infty$时，$\frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|}$关于$t\in I$一致趋于零．

(H_4)存在$0<\alpha<\beta<1$及$\phi\in P^*$使得对于$x>\theta$有$\phi(x)>0$并且当$x\in P$，$\|x\|\to 0$时$\frac{\phi(f(t,x))}{\phi(x)}$关于$t\in[\alpha,\beta]$一致趋于$+\infty$.

(H_5)存在$0<\alpha<\beta<1$及$\phi\in P^*$使得对于$x>\theta$有$\phi(x)>0$并

且当 $x\in P$，$\|x\|\to+\infty$ 时 $\dfrac{\phi(f(t,x))}{\phi(x)}$ 关于 $t\in[\alpha,\beta]$ 一致趋于 $+\infty$。

(H_6) 存在 $\eta>0$ 使得 $\sup\limits_{t\in I,x\in P\cap T_\eta}\|f(t,x)\|<\dfrac{4\eta}{N}$，其中 N 是锥 P 的正规常数（当使用条件 (H_6) 时，我们假定 P 是正规的，即存在常数 $N>0$ 使 $\theta\leqslant x\leqslant y$ 蕴含 $\|x\|\leqslant N\|y\|$。关于锥的正规性的详细讨论，参看郭大钧[1]）。

定理9.4.1 设锥 P 是正规的且条件 (H_1) 满足。如果条件 (H_2) 和 (H_5) 满足或条件 (H_3) 和 (H_4) 满足，则两点边值问题(9.4.1)至少具有一个正解。

证 对于任给的 $0<\alpha<\beta<1$，易知函数(9.4.4)满足

$$G(t,s)\geqslant\alpha(1-\beta),\quad t,s\in[\alpha,\beta];\tag{9.4.12}$$

$$G(t,s)\geqslant\alpha(1-\beta)G(u,s),\ t\in[\alpha,\beta],\ u,s\in I.\tag{9.4.13}$$

事实上，(9.4.12)式是显然的，(9.4.13)式由下列两式推出：

$$t\in[\alpha,\beta]\Rightarrow G(t,s)$$

$$=\begin{cases}t(1-s)\geqslant\alpha(1-s), & \text{若}\beta\leqslant s\leqslant1;\\ t(1-s)\text{或}s(1-t)\geqslant\alpha(1-\beta), & \text{若}\alpha<s<\beta;\\ s(1-t)\geqslant(1-\beta)s, & \text{若}0\leqslant s\leqslant\alpha;\end{cases}$$

$$G(u,s)\leqslant s(1-s),\quad u,s\in I.$$

现令

$$K=\{x\in Q\,|\,x(t)\geqslant\alpha(1-\beta)x(s),\ t\in[\alpha,\beta],\ s\in I\}.$$

很明显，K 是 $C[I,E]$ 中一个锥且 $K\subset Q$。对任何 $x\in Q$，由(9.4.13)式知

$$t\in[\alpha,\beta]\Rightarrow Ax(t)=\int_0^1G(t,s)f(s,x(s))ds$$

$$\geqslant \alpha(1-\beta)\int_0^1 G(u,s)f(s,x(s))ds$$

$$=\alpha(1-\beta)Ax(u),\quad u\in I,$$

故$Ax\in K$，从而

$$A(K)\subset K. \tag{9.4.14}$$

我们先假定(H_2)和(H_5)满足.取

$$M>[\alpha(1-\beta)(\beta-\alpha)]^{-1}. \tag{9.4.15}$$

根据(H_5)，存在$\tau>0$使

$$\phi(f(t,x))\geqslant M\phi(x),\ x\in P,\|x\|\geqslant\tau,t\in[\alpha,\beta] \tag{9.4.16}$$

现在，对于任何

$$R>N\tau[\alpha(1-\beta)]^{-1}, \tag{9.4.17}$$

我们验证

$$Ax\nleqslant x,\quad x\in K,\quad \|x\|_C=R. \tag{9.4.18}$$

事实上，如果存在$x_0\in K$，$\|x_0\|_C=R$使$Ax_0\leqslant x_0$，则

$$x_0(t)\geqslant\alpha(1-\beta)x_0(s),\ t\in[\alpha,\beta],\ s\in I,$$

从而

$$N\|x_0(t)\|\geqslant\alpha(1-\beta)\|x_0(s)\|,\quad t\in[\alpha,\beta],\ s\in I.$$

由此，注意到(9.4.17)式，得

$$\min_{t\in[\alpha,\beta]}\|x_0(t)\|\geqslant\frac{\alpha(1-\beta)}{N}\|x_0\|_C=\frac{\alpha(1-\beta)R}{N}>\tau. \tag{9.4.19}$$

又，根据(9.4.12)式，有

$$t\in[\alpha,\beta]\Rightarrow x_0(t)\geqslant Ax_0(t)\geqslant\int_\alpha^\beta G(t,s)f(s,x_0(s))ds$$

$$\geqslant\alpha(1-\beta)\int_\alpha^\beta f(s,x_0(s))ds. \tag{9.4.20}$$

于是，由(9.4.20)、(9.4.19)以及(9.4.16)诸式，得

$$\phi(x_0(t))\geqslant\alpha(1-\beta)\phi\left[\int_\alpha^\beta f(s,x_0(s))ds\right]$$

$$=\alpha(1-\beta)\int_\alpha^\beta \phi[f(s,x_0(s))]ds$$

$$\geqslant\alpha(1-\beta)\int_\alpha^\beta M\phi(x_0(s))ds,$$

从而

$$\int_\alpha^\beta \phi(x_0(t))dt\geqslant\alpha(1-\beta)(\beta-\alpha)M\int_\alpha^\beta \phi(x_0(s))ds \tag{9.4.21}$$

容易看出

$$\int_\alpha^\beta \phi(x_0(t))dt>0. \tag{9.4.22}$$

事实上，若$\int_\alpha^\beta \phi(x_0(t))dt=0$，则$\phi(x_0(t))=0$，从而$x_0(t)=\theta$对任何$t\in[\alpha,\beta]$成立．因为$x_0\in K$，故知$x_0(s)=\theta$对一切$s\in I$成立，从而$\|x_0\|_C=0$，此与$\|x_0\|_C=R$矛盾．现由（9.4.21）式与(9.4.22)式知

$$\alpha(1-\beta)(\beta-\alpha)M\leqslant1,$$

此与(9.4.15)式矛盾，故(9.4.18)式成立．

另一方面，根据假设(H_2)及$f(t,\theta)\equiv\theta$，存在$\delta>0$使得

$$\|f(t,x)\|\leqslant\frac{2}{N}\|x\|,\quad x\in P,\quad \|x\|<\delta,\quad t\in I. \tag{9.4.23}$$

现证，对于任何$0<r<\delta$，有

$$Ax\not\geqslant x,\quad x\in K,\quad \|x\|_C=r. \tag{9.4.24}$$

事实上，若有$x_1\in K$，$\|x_1\|_C=r$使得$Ax_1\geqslant x_1$，注意到

$$\max_{t,s\in I}G(t,s)=\frac{1}{4}, \tag{9.4.25}$$

我们有

$$\theta \leqslant x_1(t) \leqslant \int_0^1 G(t,s) f(s,x,(s)) ds$$

$$\leqslant \frac{1}{4}\int_0^1 f(s,x_1(s)) ds, \quad t \in I,$$

再根据(9.4.23)式，得

$$\|x_1(t)\| \leqslant \frac{N}{4}\int_0^1 \|f(s,x_1(s))\| ds \leqslant \frac{N}{4}\int_0^1 \frac{2}{N}\|x_1(s)\| ds$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\|x_1\|_C = \frac{r}{2}, \quad t \in I,$$

从而$\|x_1\|_C \leqslant \frac{r}{2}$，此与$\|x_1\|_C = r$矛盾。故(9.4.24)成立。

根据引理9.4.2，在$K_{r,R} = \{x \in K \mid r \leqslant \|x\|_C \leqslant R\}$上，$A$是严格集压缩算子。由(9.4.14)、(9.4.18)以及(9.4.24)诸式并利用引理9.4.3，知A在$K_{r,R}$中具有不动点，根据引理 9.4.1，此不动点即为问题(9.4.1)的解。

当条件(H_3)与(H_4)满足时，证明是类似的。用建立(9.4.18)式所使用的方法，由(H_4)我们断定：存在$\delta > 0$使对任何$0 < r < \delta$，有

$$Ax \not\leqslant x, \quad x \in K, \quad \|x\|_C = r. \tag{9.4.26}$$

另一方面，根据(H_3)，存在$l > 0$使得

$$\|f(t,x)\| \leqslant \frac{2}{N}\|x\|, \quad x \in P, \quad \|x\| \geqslant l, \ t \in I. \tag{9.4.27}$$

又，由条件(H_1)，有

$$\sup\{\|f(t,x)\| \mid t \in I, x \in P \cap T_l\} = r < +\infty. \tag{9.4.28}$$

由(9.4.27)式和(9.4.28)式，得

$$\|f(t,x)\| \leqslant \frac{2}{N}\|x\| + r, \ x \in P, \ t \in I. \tag{9.4.29}$$

注意到(9.4.29)式和(9.4.25)式，利用建立(9.4.24)式时所使

用的方法，即可得知：对于任何 $R>\frac{1}{2}Nr$，我们有

$$Ax\not\geqslant x,\quad x\in K,\quad \|x\|_C=R. \tag{9.4.30}$$

最后，由(9.4.26)、(9.4.30)两式并利用引理 9.4.3，可知A在$K_{r,R}$上具有不动点。证完。

定理9.4.2 设锥P是正规的，并且条件(H_1)、(H_4)、(H_5)和(H_6)满足。则两点边值问题(9.4.1)至少具有两个正解x_1与x_2，满足

$$0<\|x_2\|_C<\eta<\|x_1\|_C. \tag{9.4.31}$$

证 假定条件(H_5)对$[\alpha,\beta](0<\alpha<\beta<1)$和$\phi\in P^*$满足，条件$(H_4)$对$[\alpha',\beta'](0<\alpha'<\beta'<1)$和$\phi'\in P^*$满足。令

$$K=\{x\in Q\,|\,x(t)\geqslant\alpha(1-\beta)x(s),\ t\in[\alpha,\beta],\ s\in I\},$$

$$K'=\{x\in Q\,|\,x(t)\geqslant\alpha'(1-\beta')x(s),\ t\in[\alpha',\beta'],s\in I\}.$$

象定理9.4.1证明中一样，我们可证

$$A(K)\subset K,\quad A(K')\subset K' \tag{9.4.32}$$

并可取r,R使$R>\eta>r>0$且满足

$$Ax\not\leqslant x,\ x\in K,\ \|x\|_C=R, \tag{9.4.33}$$

$$Ax\not\leqslant x,\ x\in K,\ \|x\|_C=r. \tag{9.4.34}$$

另一方面，易知

$$Ax\not\geqslant x,\ x\in Q,\ \|x\|_C=\eta. \tag{9.4.35}$$

事实上，如果存在$x_0\in Q$，$\|x_0\|_C=\eta$使$Ax_0\geqslant x_0$，则由(9.4.25)式知

$$\theta\leqslant x_0(t)\leqslant\int_0^1 G(t,s)f(s,x_0(s))ds$$

$$\leqslant\frac{1}{4}\int_0^1 f(s,x_0(s))ds,\quad t\in I,$$

从而

$$\|x_0(t)\|\leqslant\frac{N}{4}\int_0^1\|f(s,x_0(s))\|ds\leqslant\frac{1}{4}NM, t\in I, \quad (9.4.36)$$

其中，根据条件(H_6)，

$$M=\{\|f(t,x)\|\,|\,t\in I,\ x\in P\cap T_\eta\}<\frac{4\eta}{N}. \quad (9.4.37)$$

由(9.4.36)、(9.4.37)两式，得

$$\eta=\|x_0\|_C\leqslant\frac{1}{4}NM<\eta,$$

这是一个矛盾．故(9.4.35)式成立．

根据引理9.4.2，A是$K_{\eta R}=\{x\in K\,|\,\eta\leqslant\|x\|_C\leqslant R\}$上的严格集压缩映象，也是$K_{r,\eta}'=\{x\in K'\,|\,r\leqslant\|x\|_C\leqslant\eta\}$上的严格集压缩映象，注意到(9.4.32)～(9.4.35)诸式，应用引理9.4.3于$A,K_{\eta,R}$和$A,K_{r,\eta}'$，即知A在$K_{\eta,R}$中具有不动点x_1，A在$K_{r,\eta}'$中具有不动点x_2，根据引理9.4.1，此x_1,x_2均为问题9.4.1的正解，注意到(9.4.35)式，知$\|x_1\|_C\neq\eta$，$\|x_2\|_C\neq\eta$，故(9.4.31)式成立．证完．

下面讨论一下有限维空间这种特例．若$E=R^n$（n维欧氏空间），$P=\{x=(x_1,\cdots,x_n)\in R^n\,|\,x_i\geqslant0,\ i=1,2,\cdots,n\}$，则两点边值问题(9.4.1) 变成

$$\begin{cases}-x_i''=f_i(t,x_1,\cdots,x_n),\ 0\leqslant t\leqslant1;\\ x_i(0)=x_i(1)=0\quad(i=1,2,\cdots,n),\end{cases} \quad (9.4.38)$$

其中f_i在$0\leqslant t\leqslant1$，$x_1\geqslant0$，…，$x_n\geqslant0$上连续、非负，并且$f_i(t,0,\cdots,0)\equiv0$．这时，条件(H_1)是自动满足的，因为对任何$t\in I$和$D\subset P\cap T_l$，均有$\alpha(f(t,D))=0$．另外，这时还有$P^*=P$．如果我们取$\phi=(1,1,\cdots,1)$，则

$$\frac{\phi(f(t,x))}{\phi(x)}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}f_i(t,x_1,\cdots,x_n)}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}.$$

于是，定理9.4.1和定理9.4.2可应用于问题(9.4.38)，而获得相应的结果。例如，由定理9.4.2，可得

定理9.4.3 设f_i在$0\leqslant t\leqslant 1$，$x_1\geqslant 0$，…，$x_n\geqslant 0$上连续、非负，并且$f_i(t,0,\cdots,0)\equiv 0(0\leqslant t\leqslant 1;\ i=1,2,\cdots,n)$。假定存在$\alpha,\beta$，$\alpha',\beta'$，$0<\alpha<\beta<1$，$0<\alpha'<\beta'<1$，使得当$x_i\geqslant 0$，$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\to+\infty$时

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}f_i(t,x_1,\cdots,x_n)}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}\to+\infty \tag{9.4.39}$$

关于$t[\alpha,\beta]$一致地成立（即一致收敛），并且，当$x_i\geqslant 0$，$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\to 0$时，(9.4.39)式也成立，且关于$t\in[\alpha',\beta']$一致地成立。再假定，存在$\eta>0$使得

$$\sum_{i=1}^{n}[f_i(t,x_1,\cdots,x_n)]^2<16\eta^2,$$

$$0\leqslant t\leqslant 1,\ x_i\geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{n}x_i^2\leqslant\eta^2.$$

那末，两点边值问题(9.4.38)至少具有两个非平凡非负解，$x_i^{(1)}$，$x_i^{(2)}\in C^2[0,1]$，满足

$$0<\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left(\sum_{i=1}^{n}[x_i^{(2)}(t)]^2\right)<\eta^2<\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left(\sum_{i=1}^{n}[x_i^{(1)}(t)]^2\right)$$

做为特例，如$n=1$，则两点边值问题(9.4.38)成为

$$\begin{cases}-x''=f(t,x), & 0\leqslant t\leqslant 1;\\ x(0)=x(1)=0.\end{cases}\tag{9.4.40}$$

这时，定理9.4.3成为下面的形式：

定理9.4.4 设$f(t,x)$在$0\leqslant t\leqslant 1$，$x\geqslant 0$时连续、非负，且$f(t,0)\equiv 0$，$0\leqslant t\leqslant 1$. 假定存在α，β，α'，β'，$0<\alpha<\beta<1$，$0<\alpha'<\beta'<1$，使得当$x\to+\infty$时

$$\frac{f(t,x)}{x}\to+\infty \tag{9.4.41}$$

关于 $t\in[\alpha,\beta]$ 一致，当$x\to+0$时（9.4.41）也成立且关于$t\in[\alpha',\beta']$一致. 再假定存在$\eta>0$使

$$f(t,x)<4\eta,\quad \forall 0\leqslant t\leqslant \eta,\quad 0\leqslant x\leqslant \eta.$$

那么，两点边值问题（9.4.40）具有两个非平凡的非负解$x^{(1)}$，$x^{(2)}\in C^2[0,1]$，满足

$$0<\max_{0\leqslant t\leqslant 1}x^{(1)}(t)<\eta<\max_{0\leqslant t\leqslant 1}x^{(2)}(t).$$

注9.4.1 容易给出满足定理9.4.4全部条件的初等函数f来，例如

$$f(t,x)=2\sqrt{x}\sin\pi t+(e^x-1)t^3\quad（取\eta=1），$$

$$f(t,x)=3\pi t(1-t)\operatorname{tg}^{\frac{1}{3}}x+x^2\ln(1+tx+t^2x^2)$$

$$\left(取\ \eta=\frac{\pi}{4}\right).$$

9.5 附　　注

9.1节的全部内容均选自Chandra, Lakshmikantham 和 Mitchell [1]. 与9.1节有关的内容还可见 Schmitt 和

Volkmann〔1〕. 定理9.2.1～定理9.2.3见Thompson〔1〕. 定理9.2.4和定理9.3.1则属于Bernfeld和Lakshmikantham〔1〕.在这篇论文中还讨论了两点边值问题最大解和最小解的存在性.与9.3节有关的进一步讨论可见Chandra, Lakshmikantham和Leela〔1〕, Bernfeld和Chandra〔1〕. 9.4节的全部结论选自郭大钧和Lakshmikantham〔2〕.

第十章　Banach空间中含间断项的常微分方程

由于现代数学和现代科学技术多方面的需要，要求人们对含间断项的非线性方程进行研究。对于这类问题，由于没有连续性假设，故传统的方法往往都不能使用

在本章中，我们首先给出了某些没有连续性条件的不动点定理。以这些不动点定理为工具，本章对 Banach 空间含间断项的常微分方程初值问题和边值问题进行了研究。

需要指出的是，本章的结果，即使对有限维空间，也都是新结果。

10.1　非连续的增算子的某些不动点定理

定义10.1.1　设X是一个Hausdorff 空间（其拓扑用τ表示），又是一个半序集（其半序用“$\leqslant$”表示）。如果拓扑τ和半序$\leqslant$满足下列相容性公理.

$$\alpha_n\leqslant\beta_n,\ \alpha_n\to\alpha,\ \beta_n\to\beta\Rightarrow\alpha\leqslant\beta \tag{10.1.1}$$

（其中收敛→由拓扑τ导出），则称X是一个序列相容的半序拓扑空间。

定义10.1.2　设X是一个序列相容的半序拓扑空间，S是X的一个子集。如果对S的每一个可数全序子集$\{x_n\}$，都存在

$\{x_n\}$的子列$\{x_{n_i}\}$及$\overline{x}\in X$，使得$x_{n_i}\to\overline{x}$，则称S是X中的拟紧集。

定义10.1.3 设X是一个序列相容的半序拓扑空间，S是X的一个子集。如果对S的每一个全序子集$\varDelta$，都存在$\varDelta$的至多可数子集$\{x_n\}$在$\varDelta$中稠密（即对任给$x\in\varDelta$，都存在$\{x_{n_i}\}\subset\{x_n\}$，使得$x_{n_i}\to x$），则称$S$是$X$中的拟可分集。

显然，列紧集一定是拟紧的，可分集一定是拟可分的。

定理10.1.1 设X是一个半序集，$D=[u_0, v_0]=\{x\in X\mid u_0\leqslant x\leqslant v_0\}$是$X$中的序区间，$A: D\to X$是一个映射。设

(i) 存在序列相容的半序拓扑空间Y及增算子$B: D\to Y$和增算子$C: [Bu_0, Bv_0]\to X$，使得A可以表为

$$A=CB;$$

(ii) $u_0\leqslant Au_0$，$Av_0\leqslant v_0$；

(iii) $B(D)$是Y中拟可分的拟紧集。

则A在D中至少有一个不动点。

证 令$R=\{x\in D\mid x\leqslant Ax\}$。显然$u_0\in R$，故$R$非空。设$M$是$R$的任意给定的全序子集，下证$M$在$R$中必有上界。因为$B: D\to Y$是增算子，故$B(M)$是$Y$中的全序子集。由于$B(M)\subset B(D)$，故由条件(iii)知存在$B(M)$的可数子集$\{y_n\}$在$B(M)$中稠密。令

$$z_1=y_1,\quad z_n=\max\{z_{n-1}, y_n\},\quad n=2, 3, \cdots.$$

由于$B(M)$是全序集，故诸z_n都有定义，并且$\{z_n\}\subset B(M)$。

由条件(iii)知存在$\{z_n\}$的子列$\{z_{n_i}\}$及$\overline{z}\in Y$，使得

$$z_{n_i}\to\overline{z} \tag{10.1.2}$$

由z_n的定义易知

$$z_1\leqslant z_2\leqslant z_3\leqslant\cdots\leqslant z_n\leqslant\cdots, \tag{10.1.3}$$

故对任意给定的 i_0，当 $i \geqslant i_0$ 时有 $z_{n_{i_0}} \leqslant z_{n_i}$。根据定义 10.1.1 中的(10.1.1)式（取 $\alpha_n = \alpha = z_{n_{i_0}}$，$\beta_n = z_{n_i}$，$\beta = \overline{z}$），可知必有 $z_{n_{i_0}} \leqslant \overline{z}$。故对一切 i，都有

$$z_{n_i} \leqslant \overline{z} \tag{10.1.4}$$

所以由 z_n 的定义及(10.1.3)式，知对一切n，都有

$$y_n \leqslant z_n \leqslant \overline{z}. \tag{10.1.5}$$

任给 $y \in B(M)$，因为 $\{y_n\}$ 在 $B(M)$ 中稠密，故存在 $\{y_{n_k}\} \subset \{y_n\}$，使 $y_{n_k} \xrightarrow{\cdot} y$。再利用定义10.1.1中的(10.1.1)式（取 $\alpha_n = y_{n_k}$，$\alpha = y$，$\beta_n = \beta = \overline{z}$），即知

$$y \leqslant \overline{z}, \quad \forall\, y \in B(M). \tag{10.1.6}$$

因为B是增算子，$M \subset D = [u_0, v_0]$，故 $\{z_n\} \subset B(M) \subset B(D) \subset [Bu_0, Bv_0]$，即 $Bu_0 \leqslant z_{n_i} \leqslant Bv_0$。利用定义10.1.1 中 的 (10.1.1) 式和(10.1.2)式，知 $\overline{z} \in [Bu_0, Bv_0]$。故 $C\overline{z}$ 有定义。令 $\overline{x} = C\overline{z}$。任给 $x \in M$，有 $Bx \in B(M)$。由(10.1.6)式知有 $Bx \leqslant \overline{z}$。由于 c 是增算子，并注意到 $x \leqslant Ax$(因为$x \in M \subset R$)，故

$$x \leqslant Ax = CBx \leqslant C\overline{z} = \overline{x}, \quad \forall x \in M. \tag{10.1.7}$$

即 $\overline{x}$ 是M的一个上界。下证

$$\overline{x} \in R. \tag{10.1.8}$$

由$Bu_0 \leqslant \overline{z} \leqslant Bv_0$，并利用条件(11)知

$$u_0 \leqslant Au_0 = CBu_0 \leqslant C\overline{z} \leqslant CBv_0 = Av_0 \leqslant v_0,$$

故 $\overline{x} = C\overline{z} \in [u_0, v_0] = D$。由(10.1.4)式及$C$的增性知

$$Cz_{n_i} \leqslant C\overline{z}. \tag{10.1.9}$$

由于$\{z_n\} \subset B(M)$，故可取 $x_{n_i} \in M$，使$Bx_{n_i} = z_{n_i}$。注意到 $x_{n_i} \leqslant Ax_{n_i}$，故由(10.1.9)式知

$$x_{n_i} \leqslant Ax_{n_i} = CBx_{n_i} = Cz_{n_i} \leqslant C\overline{z}.$$

再由B的增性即知

$$z_{n_i}=Bx_{n_i}\leqslant BC\overline{z}.$$

由此并利用定义10.1.1中的(10.1.1)式（取 $\alpha_n=z_{n_i}$，$\alpha=\overline{z}$，$\beta_n=\beta=BC\overline{z}$，并注意（10.1.2）式）可得$\overline{z}\leqslant BC\overline{z}$。于是由$C$是增算子可知。

$$\overline{x}=C\overline{z}\leqslant CBC\overline{z}=AC\overline{z}=A\overline{x},$$

故(10.1.8)式成立，即M在R中有上界。

由于M是R中的任意全序子集，故上面我们已经证明了R中的任意全序子集必在R中有上界。根据Zorn引理，R必有极大元。设x^*是R的一个极大元。因为$x^*\in R$，故$x^*\leqslant Ax^*$。若$x^*\neq Ax^*$，则$Ax^*\leqslant A(Ax^*)$，即$Ax^*\in R$且$x^*\leqslant Ax^*$，$x^*\neq Ax^*$，此与x^*的极大性矛盾。故必有$x^*=Ax^*$。证毕。□

定理10.1.1保证了不动点的存在性。在微分方程理论中，有时人们更关心方程最大解和最小解的存在性。为此，我们给出下列定理。

定理10.1.2 在定理10.1.1的条件下，A必有最大不动点和最小不动点。

证 令

$$\mathrm{Fix}A=\{x\in D\,|\,x\text{是}A\text{的不动点}\}.$$

由定理10.1.1知$\mathrm{Fix}A\neq\phi$。令

$$S=\{[u,v]\text{是}X\text{中的序区间}\,|\,u,v\in D,\ u\leqslant Au,Av\leqslant v,\ \mathrm{Fix}A\subset[u,v]\}.$$

显然$D\in S$，故S非空。在S中取包含关系作为半序关系，即若$I_1\in S$，$I_2\in S$，$I_1\subset I_2$，则定义$I_1\leqslant I_2$。下证S在该半序下必有极小元。任取S中的一个全序子集$\{I_\alpha|\alpha\in\wedge\}$（$\wedge$为指标集），其中$I_\alpha=[u_\alpha,v_\alpha]$。令$M=\{u_\alpha|\alpha\in\wedge\}$，显然$M$是$X$中的全序子集，因为$B:D\to Y$是增算子，故$B(M)$是$Y$中的全序

子集．仿定理10.1.1之证明，取$B(M)$中的可数子集在$B(M)$中稠密，并令

$$z_1=y_1,\quad z_n=\max\{z_{n-1},\ y_n\},\quad n=2,\ 3,\ \cdots,$$

则存在$\{z_n\}$的子列$\{z_{n_i}\}$及$\overline{z}\in Y$，使(10.1.2)式成立．令$\overline{x}=C\overline{z}$，则由定理(10.1.1)之证明知$\overline{x}$有定义，$\overline{x}$是$M$的上界，并且

$$\overline{x}\leqslant A\overline{x}. \tag{10.1.10}$$

任给$x\in \mathrm{Fix}A$．由$\mathrm{Fix}A\subset I_\alpha(\forall\alpha\in\Lambda)$知

$$u_\alpha\leqslant x,\quad \forall\alpha\in\Lambda.$$

由于B是增算子，所以

$$Bu_\alpha\leqslant Bx,\quad \forall\alpha\in\Lambda. \tag{10.1.11}$$

注意到$\{z_n\}\subset B(M)$，故由(10.1.11)式知对一切n_i有

$$z_{n_i}\leqslant Bx \tag{10.1.12}$$

由于Y是序列相容的半序拓扑空间，故由(10.1.12)和(10.1.2)两式及定义10.1.1知$\overline{z}\leqslant Bx$，从而

$$\overline{x}=C\overline{z}\leqslant CBx=Ax=x,\quad \forall x\in \mathrm{Fix}A. \tag{10.1.13}$$

考察$N=\{v_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$，用同样的方法可以证明存在$\overline{y}\in D$，使$\overline{y}$是$N$的下界，

$$A\overline{y}\leqslant\overline{y}, \tag{10.1.14}$$

$$\overline{y}\geqslant x,\qquad \forall x\in \mathrm{Fix}A. \tag{10.1.15}$$

由(10.1.13)和(10.1.15)两式知$\overline{x}\leqslant\overline{y}$．令$\overline{I}=[\overline{x},\ \overline{y}]$，则由(10.1.10)、(10.1.13)、(10.1.14)和(10.1.15)四式知$\overline{I}\in S$．显然$\overline{I}$是$\{I_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$的一个下界、根据Zorn引理，$S$必有极小元．

令$I^*=[u^*,v^*]$是S的极小元，则由S定义知

$$u^*\leqslant Au^*,\quad Av^*\leqslant v^*,\quad \mathrm{Fix}A\subset[u^*,v^*]$$

若u^*不是A的不动点，即$u^*\neq Au^*$，则由A是增算子知$Au^*\leqslant A(Au^*)$，并且对任给$x\in\mathrm{Fix}A$，由$u^*\leqslant x$知$Au^*\leqslant Ax=x$，从

而$\mathrm{Fix}A\subset[Au^*,v^*]$。这表明

$$[Au^*,v^*]\in S.$$

但$[u^*,v^*]$真包含了$[Au^*,v^*]$，此与$[u^*,v^*]$是S的极小元矛盾。所以u^*是A的不动点。同理v^*也是A的不动点。注意到$\mathrm{Fix}A\subset[u^*,v^*]$，故$u^*$是$A$的最小不动点，$v^*$是$A$的最大不动点。□

设E是Banach空间，P是E中的锥，则在E的范数拓扑和P导出的半序下，E是序列相容的半序拓扑空间。事实上，设$x_n\in E$，$y_n\in E$，

$$x_n\leqslant y_n,\quad x_n\to x^*,\quad y_n\to y^*,$$

则$y_n-x_n\in P$，$y_n-x_n\to y^*-x^*$。由于P是闭集，从而$y^*-x^*\in P$，此即$x^*\leqslant y^*$。

设B是E的一个子集。如果B的任何一个全序子集都是相对紧集，则由定义10.1.2和定义10.1.3知B必然是拟紧的拟可分集。因此，讨论如何判定一个全序集是相对紧集，对定理10.1.1和定理10.1.2的应用，是十分重要的。下面的定理回答了这一问题。

定理10.1.3 设E是Banach空间，P是E中的正规锥，M是E的全序子集。则下列三个命题是等价的：

(i)M是相对紧集；

(ii)M是相对弱序列紧集，即对M中的每一个序列$\{x_n\}$，都存在$\{x_n\}$的子序列$\{x_{n_i}\}$弱收敛于E中的某一点；

(iii)M是有界的相对弱序列完备集，即M是有界集，并且对M中的每一个弱基本列$\{x_n\}$，都存在$x_0\in E$，使$x_n\xrightarrow{\text{弱}}x_0$。

证 (i)⇒(ii)⇒(iii)是显然的。下面由(iii)推出(i)。设

M是有界的相对弱序列完备集。任给M中的一个序列$\{x_n\}$。令$N=\{x_n\}$。分两种情况。

第一种情况：存在无穷多个$x^{(m)}\in N(m=1,2,\cdots)$，使$x^{(1)}=\inf N$，并且对每个$m\geq 2$，都有$x^{(m)}=\inf\{N\setminus\{x^{(1)},x^{(2)},\cdots,x^{(m-1)}\}\}$。此时显然有

$$x^{(1)}\leq x^{(2)}\leq\cdots\leq x^{(m)}\leq\cdots. \tag{10.1.16}$$

因为P是正规锥，故P的共轭锥$P^*=\{f\in E^*|f(x)\geq 0, \forall x\in P\}$是生成的，即$E^*=\{f_1-f_2|f_1\in P^*, f_2\in P^*\}$（参见K. Deimling〔2〕命题19.4）。因此对任给$f\in E^*$，存在$f_1\in P^*$，$f_2\in P^*$，使$f=f_1-f_2$。由(10.1.16)式知

$$f_i(x^{(1)})\leq f_i(x^{(2)})\leq\cdots\leq f_i(x^{(m)})\leq\cdots,\ i=1,\ 2.$$

注意到$\{x^{(m)}\}\subset M$是有界集，故$\{f_1(x^{(m)})\}$和$\{f_2(x^{(m)})\}$都是R^1中单调递增的有上界的数列，从而都是R^1中的基本列。所以由$f=f_1-f_2$知$\{f(x^{(m)})\}$也是R^1中的基本列。由于$f\in E^*$是任取的，故$\{x^{(m)}\}$是E中的弱基本列。因为$\{x^{(m)}\}\subset M$，M是相对弱序列完备的，故必存在$x^*\in E$，使

$$x^{(m)}\xrightarrow{\text{弱}}x^* \tag{10.1.17}$$

对固定的m_0，当$m\geq m_0$时由(10.1.16)式知

$$x^{(m_0)}\leq x^{(m)},$$

即$x^{(m)}-x^{(m_0)}\in P$。由（10.1.17）式知$x^{(m)}-x^{(m_0)}\xrightarrow{\text{弱}}x^*-x^{(m_0)}$.由于$P$是凸闭集，故$P$是弱序列闭的，从而有$x^*-x^{(m_0)}\in P$，即$x^{(m_0)}\leq x^*$。因此

$$x^{(m)}\leq x^*,\ m=1,\ 2,\ \cdots. \tag{10.1.18}$$

下证$\{x^{(m)}\}$必有子列强收敛于x^*。若不然，必存在常数$r>0$，使对一切m，都有

$$\|x^{(m)}-x^*\|\geqslant r. \qquad (10.1.19)$$

定义

$$M_m=\{x\in E\,|\,x\leqslant x^{(m)}\}$$

$$M=\mathop{\subset}\limits_{m=1}^{\infty}M_m$$

由（10.1.16）式知$M_1\subset M_2\subset\cdots\subset M_m\subset\cdots$，并且每个$M_m$都是凸集，易知$M$是凸集，从而$\overline{M}$是凸闭集。因为$x^{(m)}\in M_m\subset M\subset\overline{M}$，$x^{(m)}\xrightarrow{\text{弱}}x^*$，$\overline{M}$是弱序列闭的，故

$$x^*\in\overline{M}. \qquad (10.1.20)$$

另一方面，对每个固定的m，任给$x\in M_m$，于是

$$\theta\leqslant x^*-x^{(m)}\leqslant x^*-x$$

（注意（10.1.18)式）。因此由P的正规性知存在$N>0$，使

$$\|x^*-x^{(m)}\|\leqslant N\|x^*-x\|.$$

利用(10.1.19)式即知

$$\|x^*-x\|\geqslant\frac{r}{N}.$$

由于$x\in M_m$是任取的，故x^*到M_m之间的$d(x^*,M_m)\geqslant\frac{r}{M}$.所以$d(x^*,\ M)\geqslant\frac{r}{N}$，从而$d(x^*,\overline{M})\geqslant\frac{r}{N}$.此与(10.1.20)式矛盾。因此必有$\{x^{(m)}\}$的子列$\{x^{(m_i)}\}$存在，使

$$x^{(m_i)}\to x^*.$$

这表明$\{x_n\}$有子列强收敛于x^*.

第二种情况：不存在$x\in N$，使$x=\inf N$，或者只存在有限个$\tilde{x}^{(m)}\in N(1\leqslant m\leqslant m_0)$，使$\tilde{x}^{(1)}=\inf N$，并且对每个$2\leqslant m\leqslant m_0$，$\tilde{x}^{(m)}=\inf\{N\setminus\{\tilde{x}^{(1)},\ \tilde{x}^{(2)},\cdots,\ \tilde{x}^{(m-1)}\}\}$，但对任给

$x\in N_1=N\setminus\{\tilde{x}^{(1)}, \tilde{x}^{(2)}, \cdots, \tilde{x}^{(m_0)}\}$，都有 $x\neq \inf N_1$。取 $x^{(1)}\in N_1$。由于 $x^{(1)}\neq \inf N_1$，故存在 $x^{(2)}\in N_1$，使 $x^{(2)}\leqslant x^{(1)}$，$x^{(2)}\neq x^{(1)}$；类推可取出无穷多个 $x^{(m)}\in N_1$，使

$$\cdots x^{(m)}\leqslant\cdots\leqslant x^{(2)}\leqslant x^{(1)}. \qquad (10.1.21)$$

仿第一种情况证明可知$\{x^{(m)}\}$必有收敛子列，从而$\{x_n\}$有收敛子列．综上所述，M中的任一序列都有收敛子列，从而M是相对紧集．证完．□

设E是 Banach 空间，P是E中的锥．如果对 E 中的任何单调递增有上界的序列$\{x_n\}$（即存在 $y\in E$，使

$$x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant\cdots\leqslant y$$

满足），都必存在 $x^*\in E$，使 $x_n\to x^*$，则称P 是正则锥．容易证明，正则锥一定是正规锥（见郭大钧[1]）．

定理10.1.4 设P是 Banach 空间 E 中的正则锥，M是E的全序子集．则M相对紧的充要条件是：M按序有界，即存在 $x^*\in E$和 $x_*\in E$，使对任给$x\in M$，$x_*\leqslant x\leqslant x^*$．

证 设M按序有界．任给M中的一个序列 $\{x_n\}$，由定理10.1.3的证明可知必存在$\{x_n\}$的子列$\{x^{(m)}\}$，使(10.1.16)式成立（此时 $\{x^{(m)}\}$ 有上界），或者使（10.1.21）式成立（此时 $\{x^{(m)}\}$有下界）．若（10.1.16）式成立，则由正则锥定义知 $\{x^{(m)}\}$是收敛序列．若(10.1.21)式成立，则对$\{-x^{(m)}\}$使用正则锥的定义可知$\{x^{(m)}\}$也是收敛序列．这表明 $\{x_n\}$ 必有子列收敛，故M相对紧．

设M是相对紧集，则M是拟紧的拟可分集，从而利用定理10.1.1的证明方法可知M在E中必有上界和下界．故M按序有界．□

定理10.1.5 设E是Banach空间，P是E中的锥，$D=[u_0, v_0]$是E中的序区间，$A:D\to D$是增算子. 若下列条件之一成立，则A在D中必有最大不动点和最小不动点：

(i) $A(D)$ 相对紧；

(ii) E是弱序列完备的，P是正规锥；

(iii) P 是正则锥.

证 在定理10.1.2中，令$X=Y=E$，并使用定理10.1.3和定理10.1.4即可. □

10.2 初值问题

设E是Banach空间，$J=[a,b]\subset R^1$.

设$x(t):J\to E$. 如果对任给$h\in E^*$，$h(x(t))$都是J上的可测函数，则称$x(t)$是J上的弱可测（抽象）函数. 如果存在J的零测度子集J_0，使得$x(J\backslash J_0)$是E中的可分集，则称$x(t)$几乎可析的. 若$x(t)$是弱可测的，又是几乎可析的，则称$x(t)$是J上的强可测（抽象）函数. 显然，连续函数是强可测的.

取$1\leqslant p<+\infty$，令

$$L_p[J,E]=\{x(t):J\to E\mid x(t)\text{ 是强可测的，}$$
$$\text{并且}\quad \int_J\|x(t)\|^p dt<+\infty\}.$$

对 $x=x(t)\in L_p[J,E]$，定义

$$\|x\|_p=\left[\int_J\|x(t)\|^p dt\right]^{\frac{1}{p}},$$

则$L_p[J,E]$在上述范数下构成一Banach空间.

引理10.2.1 设E是自反空间，$1<p<+\infty$，则$L_p[J,

E〕也是自反空间.

这一引理的证明见R.E.Edwards〔1〕.

为讨论 Banach 空间含间断项的常微分方程初值问题，我们先讨论更一般的含间断项的Volterra型积分方程的解.

在本节中我们设

(H_1) E是自反空间，P是E中的正规锥;

(H_2) $f(t,x)$: $I \times E \to E$（$I=[0,1]$，$f(t,x)$ 不假定连续），由 $f(t,x)$确定的抽象Немыцкий算子

$$Fu=f(t,u(t))$$

把每一个连续函数映为强可测函数;

(H_3)存在$M>0$，使对任给 $x,y \in E$，$x \geqslant y$，有

$$f(t,x)-f(t,y) \geqslant -M(x-y).$$

考察 Banach 空间中含非线性间断项的Volterra型积分方程

$$u(t)=x(t)+\int_0^t k(t,s)f(s,u(s))ds, \quad t \in I \quad (10.2.1)$$

其中 $x(t) \in C[I,E]$ 是已知的，$k(t,s)$是定义在$0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$上的非负实值连续函数.

定理10.2.1 设假设 (H_1) ~ (H_3) 满足. 又设存在$u_0 \in C[I,E]$，$v_0 \in C[I,E]$，$u_0 \leqslant v_0$以及$1<p<\infty$，使得

$$u_0(t) \leqslant x(t)+\int_0^t k(t,s)f(s,u_0(s))ds, \ t \in I, \quad (10.2.2)$$

$$v_0(t) \geqslant x(t)+\int_0^t k(t,s)f(s,v_0(s))ds, \ t \in I, \quad (10.2.3)$$

$$Fu_0 \in L_p[I,E], \quad Fv_0 = L_p[I,E]. \quad (10.2.4)$$

则方程(10.2.1)在$D=[u_0,v_0]=\{u \in C[I, E] | u_0(t) \leqslant u(t) \leqslant$

$v_0(t)\}$中必有最大连续解和最小连续解。

证 任给 $h\in C[I, E]$，考察 Banach 空间中的线性 Volterra 型积分方程

$$u(t)=h(t)-M\int_0^t k(t,s)u(s)ds,\quad t\in I. \qquad (10.2.5)$$

利用常规证法（例如利用压缩映射原理）可知对任给 $h\in C[I,E]$，方程(10.2.5)都有唯一解 $u_h\in C[I,E]$。定义

$$Hh=u_h$$

下证H：$C[I,E]\to C[I,E]$是增算子。设 h_1，$h_2\in C[I,E]$，$h_1\leqslant h_2$。对任给 $\varphi\in P^*=\{\varphi\in E^*|\varphi(x)\geqslant 0,\ \forall x\in P\}$，令

$$m(t)=\varphi((Hh_2)(t)-(Hh_1)(t)).$$

由H定义可知

$$\begin{aligned}m(t)&=\varphi(u_{h_2}(t)-u_{h_1}(t))\\&=\varphi[(h_2(t)-M\int_0^t k(t,s)u_{h_2}(s)ds)\\&\quad-(h_1(t)-M\int_0^t k(t,s)u_{h_1}(s)ds)]\\&\geqslant\varphi(h_2(t)-h_1(t))\\&\quad-M\int_0^t k(t,s)\varphi(u_{h_2}(s)-u_{h_1}(s))ds\\&\geqslant-M\int_0^t k(t,s)m(s)ds.\end{aligned}$$

解该积分不等式（例如，参见 V. Lakshmikantham 和 S. Leela[1]），可得

$$m(t)\geqslant 0,\quad \forall t\in I. \qquad (10.2.6)$$

这表明对任给 $\varphi\in P^*$，都有 $\varphi(Hh_2-Hh_1)\geqslant 0$，故 $Hh_2\geqslant Hh_1$，即H是增算子。令

$$Bu=Fu+Mu,\quad \forall u\in C[I,E],$$

$$Gv = x(t) + \int_0^t k(t,s)v(s)ds, \quad \forall v \in L_p[I,E],$$

$$C = HG.$$

则由(H_2)知B把$C[I,E]$中的元素映为强可测函数．任给 $u \in C[I,E]$，$u_0 \leqslant u \leqslant v_0$，则由$(H_3)$知

$$Bu_0 \leqslant Bu \leqslant Bv_0,$$

从而 $\theta \leqslant (Bu)(t) - (Bu_0)(t) \leqslant (Bv_0)(t) - (Bu_0)(t) \quad (\forall t \in I)$．因为$P$是正规锥，故存在常数 $m_0 > 0$，使

$$\|(Bu)(t) - (Bu_0)(t)\| \leqslant m_0 \|(Bv_0)(t) - (Bu_0)(t)\|.$$

再利用(10.2.4)式可知 $Bu \in L_p[I,E]$．所以B是映D入$L_p[I,E]$的增算子．由G的定义及 $k(t,s)$的非负连续性知$G: L_p[I,E] \to C[I,E]$是增算子．注意到H是增算子，故$C: L_p[I,E] \to C[I,E]$是增算子．令

$$A = CB$$

下证

$$u_0 \leqslant Au_0, \quad Av_0 \leqslant v_0. \qquad (10.2.7)$$

任给 $\varphi \in P^*$，令 $r(t) = \varphi((Au_0)(t) - u_0(t))$，则

$$\begin{aligned} r(t) &= \varphi((HGBu_0)(t) - u_0(t)) \\ &= \varphi[x(t) + \int_0^t k(t,s)(f(s,u_0(s)) + Mu_0(s))ds \\ &\quad - M\int_0^t k(t,s)(Au_0)(s)ds - u_0(t)], \end{aligned}$$

从而利用(10.2.2)式，可得

$$r(t) \geqslant -M\int_0^t k(t,s)r(s)ds.$$

解该积分不等式得 $r(t) \geqslant 0 \ (\forall t \in I)$．这表明对任给$\varphi \in P^*$，都有 $\varphi((Au_0)(t) - u_0(t)) \geqslant 0$，从而 $u_0 \leqslant Au_0$．同理可证$Au_0 \leqslant$

v_0。故(10.2.7)式成立。

在定理10.1.2中，令 $X=C[I,E]$，$Y=L_p[I,E]$。因为E是自反空间，$1<p<+\infty$，故根据引理10.2.1知$L_p[I,E]$也是自反空间。因为P是正规锥，故

$$P_B=\{u\in L_p[I,E]\,|\,u(t)\geqslant\theta,\forall t\in I\}$$

也是$L_p[I,E]$中的正规锥。任给$[Bu_0,\ Bv_0]=\{u\in L_p[I,E]\,|\,Bu_0\leqslant u\leqslant Bv_0\}$中的全序子集$M$，则$M$是有界的。由于$L_p[I,E]$是自反空间，故$M$是相对弱序列紧集。根据定理10.1.3，$M$是相对紧的。这表明$[Bu_0,\ Bv_0]$是拟紧的拟可分集，故定理10.1.2的全部条件满足。故根据定理10.1.2，A在D中有最大不动点和最小不动点。注意到A的不动点与方程(10.2.1)的解是等价的，故方程(10.2.1)必在D中有最大解和最小解。证完。□

现在，我们考虑 Banach 空间常微分方程

$$u'=f(t,u),\quad u(0)=x_0\in E,\quad t\in I. \tag{10.2.8}$$

众所周知，当$f(t,u)$连续时，初值问题(10.2.8)等价于

$$u(t)=x_0+\int_0^t f(s,u(s))ds,\qquad t\in I. \tag{10.2.9}$$

故当$f(t,u)$不连续时，我们把 Volterra 积分方程(10.2.9)的解定义为初值问题(10.2.8)的解。

定理10.2.2 设$(H_1)\sim(H_3)$满足。又设存在u_0，$v_0\in C^1[I,E]=\{u\in C[I,E]\,|\,u$在$I$上连续可微$\}$，$u_0\leqslant v_0$以及$1<p<+\infty$，使得

$$\begin{cases} u_0'(t)\leqslant f(t,u_0(t)), & \forall t\in I\\ u_0(0)\leqslant x_0; \end{cases} \tag{10.2.10}$$

$$\begin{cases} v_0'(t) \geqslant f(t, v_0(t)), & \forall t \in I \\ v_0(0) \geqslant x_0 \end{cases} \tag{10.2.11}$$

$$Fu_0 \in L_p[I, E], \quad Fv_0 \in L_p[I, E].$$

则初值问题(10.2.8) 在$D=[u_0, v_0]$中必有最大解和最小解。

证 由(10.2.11)式知

$$u_0(t) \leqslant u_0(0) + \int_0^t f(s, u_0(s))ds$$

$$\leqslant x_0 + \int_0^t f(s, u_0(s))ds, \quad t \in I.$$

由(10.2.12)式知

$$v_0(t) \geqslant x_0 + \int_0^t f(s, v_0(s))ds, \quad t \in I.$$

故由定理10.2.1（取 $k(t,s) \equiv 1$.）知定理10.2.2的结论成立。□

10.3 边值问题

本节考察 Banach 空间中含间断项的二阶常微分方程两点边值问题。令

$$Lu = -(p(t)u'(t))' + q(t)u(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{10.3.1}$$

其中 $p(t) \in C^1[I, R^1]$，$p(t) > 0$ ($\forall t \in I$)，$q(t) \in C[I, R^1]$，$q(t) \geqslant 0$ ($\forall t \in I$)，$u \in C[I, E]$。考察

$$Lu = f(t, u), \quad t \in I, \tag{10.3.2}$$

$$\begin{cases} \alpha_0 u(0) + \beta_0 u'(0) = 0 \\ \alpha_1 u(1) + \beta_1 u'(1) = 0 \end{cases} \tag{10.3.3}$$

其中 $\alpha_0\geqslant 0$，$\beta_0\leqslant 0$，$\alpha_1\geqslant 0$，$\beta_1\geqslant 0$，$\alpha_0^2+\beta_0^2\neq 0$，$\alpha_1^2+\beta_1^2\neq 0$。

定理10.3.1 设§10.2中的假设$(H_1)(H_2)(H_3)$满足。又设存在 $u_0,v_0\in C^2[I,E]$，使得 $u_0\leqslant v_0$，

$$\begin{cases} Lu_0\leqslant f(t,u_0(t)), \quad t\in I, \\ \alpha_0u_0(0)+\beta_0u_0'(0)\leqslant\theta, \alpha_1u_0(1)+\beta_1u_0'(1)\leqslant\theta, \end{cases} \tag{10.3.4}$$

$$\begin{cases} Lv_0\geqslant f(t,v_0(t)) \\ \alpha_0v_0(0)+\beta_0v_0'(0)\geqslant\theta, \alpha_1v_0(1)+\beta_1v_0'(1)\geqslant\theta \end{cases} \tag{10.3.5}$$

$$Fu_0\in L_p[I,E], \quad Fv_0\in L_p[I,E], \tag{10.3.6}$$

其中 $1<p<+\infty$。则边值问题(10.3.2)和(10.3.3)在区间 $D=[u_0,v_0]=\{u\in C[I,E]\,|\,u_0\leqslant u\leqslant v_0\}$ 中必有最大连续解和最小连续解。

证 令 $f_1(t,u)=f(t,u)+Mu$，其中M由(H_3)确定。由(H_3)知 $f_1(t,u)$关于u是增的，令 $L_1u=Lu+Mu$，则方程(10.3.2)变为

$$L_1u=f_1(t,u). \tag{10.3.7}$$

故不失一般，我们可以假定 $f(t,u)$ 关于u是增的（否则用方程(10.3.7)代替方程(10.3.2)即可）。

令 $k(t,s)$：$I\times I\to R^1$是一维空间两点边值问题

$$L\eta\equiv(-p(t)\eta'(t))'+q(t)\eta(t)=0, \quad 0<t<1, \tag{10.3.8}$$

$$\alpha_0\eta(0)+\beta_0\eta'(0)=0, \quad \alpha_1\eta(1)+\beta_1\eta'(1)=0 \tag{10.3.9}$$

（其中 $\eta\in C[I,R^1]$，下面L将依它所作用的函数是取值Banach

空间还是取值R^1而分别在(10.3.1)式和(10.3.8)式所表示的意义下被使用)的Creen函数，则$k(t,s)\geqslant 0$．容易证明，边值问题(10.3.2)和(10.3.3)等价于积分方程

$$u(t)=\int_0^1 k(t,s)f(s,u(s))ds. \qquad (10.3.10)$$

事实上，边值问题(10.3.2)和(10.3.3)等价于对任给$\varphi\in E^*$，有

$$L\varphi(u(t))=\varphi(f(t,u(t))),\quad 0<t<1, \qquad (10.3.11)$$

$$\alpha_0\varphi(u(0))+\beta_0\varphi'(u(0))=0, \qquad (10.3.12)$$

$$\alpha_1\varphi(u(1))+\beta_1\varphi'(u(1))=0.$$

积分方程(10.3.10)等价于对任给$\varphi\in E^*$，有

$$\varphi(u(t))=\int_0^1 k(t,s)\varphi(f(s,u(s)))ds. \qquad (10.3.13)$$

众所周知，当$\varphi\in E^*$固定时，边值问题(10.3.11)和(10.3.12)与积分方程(10.3.13)是等价的（它们分别是一维空间中的边值问题和积分方程），从而边值问题(10.3.2)和(10.3.3)与积分方程(10.3.10)是等价的．同理可证(10.3.4)式与

$$u_0(t)\leqslant\int_0^1 k(t,s)f(s,u_0(s))ds$$

等价，(10.3.5)式与

$$v_0(t)\geqslant\int_0^1 k(t,s)f(s,u_0(s))ds$$

等价．在定理10.1.2中，令$B=F$，C由

$$Cu=\int_0^1 k(t,s)u(s)ds$$

定义，$A=CB$，则定理10.1.2的全部条件满足（参考定理10.3.1的有关证明）．从而根据定理10.1.2，积分方程(10.3.10)在D中有最大连续解和最小连续解，即边值问题(10.3.2)和(10.3.3)在D中有最大连续解和最小连续解．□

注10.3.1 显然，我们可以把定理10.3.1推广到Banach空间含间断项的椭圆型偏微分方程边值问题上，本书不再详述。

10.4 附 注

定理10.1.1选自孙经先〔3〕，与定理10.1.1有关的讨论，还见孙经先〔3〕、〔6〕.定理10.1.3和定理10.1.4见孙经先〔4〕、本章的其余结果都是由孙经先获得的，其中大部分尚未发表。

第十一章 Banach空间中的泛函微分方程

由于近代科学技术的发展，在许多科学领域的研究中，都出现了泛函微分方程。因为泛函微分方程比常微分方程更精确地描述了客观世界，所以对泛函微分方程的研究，不但有重要的理论价值，而且有广泛的应用价值。

本章给出了 Banach 空间中一类泛函微分方程解的存在性的若干结果。

11.1 逼近解的存在性

设E是实 Banach 空间，对某实数 $\tau>0$，令$C=C[[-\tau, 0], E]$。对 $\varphi\in C$，定义

$$\|\varphi\|_0=\sup_{T\in[-\tau,0]}\|\varphi(T)\|,$$

其中$\|\cdot\|$表示E中的范数。设F是E中的一个闭子集。令

$$C_F=\{\varphi\in C \mid \varphi(0)\in F\},$$

$$\widetilde{C}_F=\{\varphi\in C \mid \varphi(0)\in F, \varphi(t)\in\overline{co}F, \forall t\in[-\tau,0]\}.$$

显然C_F和$\widetilde{C}_F$都是C中的闭子集。

设 $a>0$，$t_0\in R_+$，$\varphi_0\in C_F$。令

$$y(t)=\begin{cases}\varphi_0(t-t_0), & \text{当 } t_0-\tau\leqslant t\leqslant t_0 \text{ 时},\\ \varphi_0(0), & \text{当 } t_0\leqslant t\leqslant t_0+a \text{ 时},\end{cases}$$

则 $y(t)\in C[[t_0-\tau,\ t_0+a],E]$. 对 $b>0$，$t\in[t_0,t_0+a]$，令

$$C_F^t(b)=C_F\cap\{\varphi\in C\,|\,\|\varphi-y_t\|_0\leqslant b\},$$

其中$y_t\in C$ 由

$$y_t(T)=y(t+T),\ \forall-\tau\leqslant T\leqslant 0$$

定义.

设 $f\in C[R_+\times C_F,E]$. 容易证明必存在 $b>0$，使得 f 在

$$C_0(b)=\bigcup_{t\in[t_0,t_0+a]}(\{t\}\times C_F^t(b))$$

上是有界的. 下面我们指出 $C_0(b)$是闭集. 事实上，设 $\{(t_n,\varphi_n)\}\subset C_0(b)$，$t_n\to t^*$，$\varphi_n\to\varphi^*$. 显然 $t^*\in[t_0,t_0+a]$，$\varphi^*\in C_F$. 显然我们有

$$\|\varphi^*-y_{t^*}\|_0\leqslant\|\varphi^*-\varphi_n\|_0+\|\varphi_n-y_{t_n}\|_0+\|y_{t_n}-y_{t^*}\|_0.$$

因此对任给的 $\varepsilon>0$，当n充分大时

$$\|\varphi^*-y_{t^*}\|_0\leqslant 2\varepsilon+b.$$

令 $\varepsilon\to 0$，即知$(t^*,\varphi^*)\in C_0(b)$.

下面我们考虑 Banach 空间中的泛函微分方程初值问题

$$x'(t)=f(t,x_t),\ x_{t_0}=\varphi_0. \tag{11.1.1}$$

在本章中我们将使用下列假设：

(H_1) $f\in C[[t_0,\ t_0+a]\times C_F,\ E]$，$t_0\in R_+$，$\varphi_0\in C_F$，$a$、$b$、$M(M>1)$满足

$$\|f(t,\varphi)\|\leqslant M-1,\ \forall(t,\varphi)\in C_0(b);$$

(H_2)对任给$(t,\varphi)\in[t_0,t_0+a]\times C_F$，有

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\lambda}d(\varphi(0)+hf(t,\varphi),\ F)=0;$$

(H_3)对任给 $t\in[t_0,t_0+a]$和$\Phi'\subset C_F^t(b)$，只要 $\alpha(\Phi'(T))\leqslant\alpha(\Phi'(0))$ $(\forall T\in[-\tau,o])$，就有

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}[\alpha(\Phi^t(0))-\alpha\{\varphi(0)-hf(t,\varphi)\,|\,\varphi\in\Phi^t\})]$$
$$\leqslant g(t,\alpha(\Phi^t(0))),$$

这里 $\alpha(\cdot)$是非紧性测度；

(H_4) $g\in C[[t_0,t_0+a]\times[0,2b],\ R_+]$，$g(t,0)\equiv 0$，$u(t)\equiv 0$ 是微分方程初值问题

$$u'=g(t,u),\ u(t_0)=0$$

的唯一解。

下面首先证明方程(11.1.1) ε-逼近解的存在性。

定理11.1.1 设 $(H_1)(H_2)$ 满足，$r=\min\{a,\ \dfrac{b}{M}\}$. 则对任给 $0<\varepsilon<1$，初值问题(11.1.1)有一个 ε-逼近解，即存在映$[t_0-\tau,\ t_0+r]\lambda E$ 的抽象函数 $x(t)$，满足

(i) 存在$\{\sigma_i|i=0,1,\cdots\}\subset[t_0,t_0+r]$，使得 $\sigma_0=t_0$，$\sigma_i<\sigma_{i+1}$，$\sigma_i<t_0+r$，$\sigma_{i+1}-\sigma_i\leqslant\varepsilon$，并且 $\lim\limits_{i\to\infty}\sigma_i=t_0+r$；

(ii) 对 $t\in[t_0-\tau,t_0]$，有 $x(t)=\varphi_0(t-t_0)$，并且

$$\|x(t)-x(s)\|\leqslant M|t-s),\ \forall t,s\in[t_0,\ t_0+r);$$

(iii) 对每一个 $i\geqslant 0$，$(\sigma_i,\ x\sigma_i)\in C_0(b)$，并且在每一个区间$[\sigma_i,\sigma_{i+1}]$上是线性的；

(iv)对 $t\in(\sigma_i,\ \sigma_{i+1})$，有$\|x'(t)-f(\sigma_i,\ x\sigma_i)\|\leqslant\varepsilon$.

证 下面通过对 i 的归纳法证明结论。设 $\sigma=t_0$，$\sigma_0<\sigma_1<\cdots<\sigma_i$ 被确定，使 $\sigma_i<t_0+r$，并且 $x(t)$在$[t_0-r,\ \sigma_i]$上有定义，满足定理所述的性质(i)～(iv)。下面我们将证明存在 $\sigma_{i+1}>\sigma_i$ 及定义在$[\sigma_i,\sigma_{i+1}]$上的函数 $x(t)$，使在$[t-\tau,\ \sigma_{i+1}]$上定理所述的性质(i)～(iv)成立。取 $\delta_i\in(0,\varepsilon]$，使

(1) $\sigma_i+\delta_i\leqslant t_0+r$；

(2) $d(x(\sigma_i)+\delta_i f(\sigma_i, x_{\sigma_i}),\ F)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\delta_i$;

(3) σ_i 是满足(1)、(2)的所有的数中最大的一个。

令 $\sigma_{i+1}=\sigma_i+\delta_i$，取 $x(\sigma_{i+1})\in F$，使

$$\|x(\sigma_i)+\delta_i f(\sigma_i, x_{\sigma_i})-x(\sigma_{i+1})\|\leqslant\varepsilon\delta_i,$$

由(2)，这样的 $x(\sigma_{i+1})$是存在的。对 $t\in[\sigma_i, \sigma_{i+1}]$，定义

$$x(t)=\frac{x(\sigma_{i+1})-x(\sigma_i)}{\sigma_{i+1}-\sigma_i}(t-\sigma_i)+x(\sigma_i).$$

容易验证 $x(t)$在$[t_0-\tau, \sigma_{i+1}]$上满足性质(ii)(iv)。下面证明$x(t)$满足性质(iii)。为此，我们只需证明

$$x_{\sigma_{i+1}}\in C_F,\ \|x_{\sigma_{i+1}}-y_{\sigma_{i+1}}\|_0\leqslant b. \tag{11.1.2}$$

因为 $x(\sigma_{i+1})\in F$，所以 $x_{\sigma_{i+1}}\in C_F$。由$\|\cdot\|_0$定义知

$$\|x_{\sigma_{i+1}}-y_{\sigma_{i+1}}\|=\sup_{T\in[-\tau,0]}\|x(\sigma_{i+1}+T)-y(\sigma_{i+1}+T)\|.$$

先考虑 $\sigma_{i+1}\geqslant t_0+\tau$ 的情况。在这种情况下，当$T\in[-\tau,\ 0]$时有$\sigma_{i+1}+T\geqslant t_0$，所以由$y$的定义和性质(ii)，有

$$\begin{aligned}\|x(\sigma_{i+1}+T)-y(\sigma_{i+1}+T)\|&=\|x(\sigma_{i+1}+T)-\varphi_0(0)\|\\&=\|x(\sigma_{i+1}+T)-x(t_0)\|\leqslant M|\sigma_{i+1}-t_0|\leqslant b.\end{aligned}$$

再考虑$\sigma_{i+1}<t_0+\tau$的情况。此时有

$$\|x(\sigma_{i+1}+T)-y(\sigma_{i+1}+T)\|$$

$$=\begin{cases}\|x(\sigma_{i+1}+T)-x(t_0)\|\leqslant M|\sigma_{i+1}-t_0|\leqslant b, \\ \qquad\qquad \text{当 } \sigma_{i+1}+T\geqslant t_0, \\ \|\varphi_0(\sigma_{i+1}+T-t_0)-\varphi_0(\sigma_{i+1}+T-t_0)\|=0, \\ \qquad\qquad \text{当 } \sigma_{i+1}+T<t_0.\end{cases}$$

因此(11.1.2)式成立。

为了完成定理的证明，下面只需证明

$$\lim_{i\to\infty}\sigma_i=t_0+r.$$

用反证法，设 $\lim\limits_{i\to\infty}\sigma_i=\overline{\sigma}<t_0+r$。分两种情况：先设$\overline{\sigma}>t_0+\tau$。此时取 l,k 充分大，使 $\sigma_l,\sigma_k\geqslant t_0+\tau$。于是

$$\|x_{\sigma_l}-x_{\sigma_k}\|_0=\sup_{T\in[-\tau,0]}\|x(\sigma_l+T)-x(\sigma_k+T)\|$$

$$\leqslant M|\sigma_k-\sigma_l|$$

这表明 $\{x_{\sigma_i}\}$ 是 Cauchy 序列。再设$\overline{\sigma}\leqslant t_0+\tau$。此时取 $\sigma_l<\sigma_k<\overline{\sigma}$，则有

$$\|x(\sigma_k+T)-x(\sigma_l+T)\|$$

$$=\begin{cases}\|\varphi_0(\sigma_k+T-t_0)-\varphi_0(\sigma_l+T-t_0)\|, & \text{若}\sigma_k+T\leqslant t_0,\\ \|x(\sigma_k+T)-\varphi_0(\sigma_l+T-t_0)\|, & \text{若}\sigma_l+T\leqslant t_0\leqslant\sigma_k+T,\\ \|x(\sigma_k+T)-x(\sigma_l+T)\|, & \text{若 } t_0\leqslant\sigma_l+T.\end{cases}$$

注意到 φ_0在$[-\tau,0]$上是一致连续的，故由

$$\|x_{\sigma_k}-x_{\sigma_l}\|_0=\sup_{T\in[-\tau,0]}\|x(\sigma_k+T)-x(\sigma_l+T)\|$$

知 $\|x_{\sigma_k}-x_{\sigma_l}\|_0\to 0$ $(k,\ l\to\infty)$。所以不论哪种情况，都存在 $\overline{\varphi}\in C_F$，使 $\lim\limits_{i\to\infty}x_{\sigma_i}=\overline{\varphi}$。

下面证明存在$\overline{\delta}\in(0,\varepsilon]$ 和 i_0，使得当 $i\geqslant i_0$时有

(1) $\sigma_i+\overline{\delta}\leqslant t_0+r$；

(2) $d(x(\sigma_i)+\overline{\delta}f(\sigma_i,\ x_{\sigma_i}),F)\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}\overline{\delta}$。

事实上，对任给 $h>0$，有

$$d(x(\sigma_i)+hf(\sigma_i,\ x_{\sigma_i}),F)$$

$$\leqslant\|x(\sigma_i)-\overline{\varphi}(0)\|+h\|f(\sigma_i,x_{\sigma_i})-f(\overline{\sigma},\ \overline{\varphi})\|$$

$$+d(\overline{\varphi}(0)+hf(\overline{\sigma},\ \overline{\varphi}),\ F).$$

取$\overline{\delta}\leqslant t_0+r-\overline{\sigma}$，$\overline{\delta}>0$，使得

$$d(\overline{\varphi}(0)+\overline{\delta}f(\overline{\sigma},\ \overline{\varphi}),\ F)\leqslant\frac{\varepsilon}{4}\overline{\delta},$$

由(H_2)，这样的$\overline{\delta}$是存在的．因为$x_{\sigma_i}\to\overline{\varphi}$，$\sigma_i\to\overline{\sigma}$，所以由$f(t,x)$的连续性知存在$i_0$，使当$i\geqslant i_0$时有

$$d(x(\sigma_i)+\overline{\delta}f(\sigma_i,\ x_{\sigma_i}),\ F)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\overline{\delta}.$$

因此，由δ_i的取法可知$\delta_i\geqslant\overline{\delta}$，此与$\delta_i\to 0$矛盾．证完．□

注11.1.1 在定理11.1.1中，若把假设(H_1)、(H_2)中C_F换成$\widetilde{C}_F$，则定理11.1.1的结论仍成立．

定理11.1.2 设(H_1)、(H_2)满足．令$\{\varepsilon_n\}\subset(0,1)$，$\varepsilon_n$是递减趋近于0的序列．设$\{x_n(t)\}$是初值问题(11.1.1)的$\varepsilon_n$－逼近解序列，其性质如定理11.1.1所述．若$\{x_n(t)\}$有一子列在$[t_0-\tau,t_0+r]$上一致收敛于$x(t)$，则$x(t)$是初值问题(11.1.1)的解．

证 不失一般设$\{x_n(t)\}$本身在$[t_0-\tau,\ t_0+r]$上一致收敛于$x(t)$．显然$x_{t_0}=\varphi_0$．因为$x(t)$在$[t_0-\tau,t_0+r]$上连续，故映射$t\to x_t$ ($t\in[t_0,t_0+r]$)也是连续的．设对应于$x_n(t)$的（如定理11.1.1性质(i)所述的）$\{\sigma_i\}$用$\{\sigma_i^n\}$表示，令$\tau_n(t)=\sigma_i^n$(当$t\in[\sigma_i^n,\ \sigma_{i+1}^n]$时)．用$x_{n,t}$表示$(x_n)_t$；因为$x_{n,t}$一致收敛于$x_t$，$\tau_n(t)\to t$，所以对$t\in[t_0,\ t_0+r]$一致有

$$\lim_{n\to\infty}\|x_t-x_{n,\tau_n(t)}\|_0=0.$$

由于$x_{n,\tau_n(t)}\in C_F$，C_F是闭集，故$x_t\in C_F$．

为了完成定理的证明，我们只需证明对于任给$t\in[t_0,t_0+r]$，有

$$\|x(t)-\varphi_0(0)-\int_{t_0}^{t} f(s,x_s)ds\| = 0. \tag{11.1.3}$$

令 $t\in[t_0,t_0+r]$，则对任给自然数n，有

$$\|x(t)-\varphi_0(0)-\int_{t_0}^{t} f(s,x_s)ds\|$$

$$\leqslant\|x(t)-x_n(t)\|+\|x_n(t)-\varphi_0(0)-$$

$$\int_{t_0}^{t} f(\tau_n(s),\ x_{n,\tau_n(s)})ds\|$$

$$+\int_{t_0}^{t}\|f(\tau_n(s),\ x_{n,\tau_n(s)})-f(s,x_s)\|ds.$$

对任给$\eta>0$，必存在$N(\eta)$，使当$n\geqslant N(\eta)$时有

$$\|x(t)-x_n(t)\|<\eta;$$

$$\left\|x_n(t)-\varphi_0(0)-\int_{t_0}^{t} f(\tau_n(s),\ x_{n,\tau_n(s)})ds\right\|$$

$$\leqslant\left\|x_n(t)-\varphi_0(0)-\int_{t_0}^{t} x_n'(s)ds\right\|$$

$$+\int_{t_0}^{t}\|x_n'(s)-f(\tau_n(s),x_{n,\tau_n(s)})\|ds$$

$$\leqslant\varepsilon_N(t-t_0)\leqslant\varepsilon_N r<\eta;$$

$$\int_{t_0}^{t}\|f(\tau_n(s),x_{n,\tau_n(s)})-f(s,x_s)\|ds<\eta.$$

从而可知(11.1.3)式成立。□

11.2 紧型条件

本节在紧型条件下讨论方程(11.1.1)的可解性。

定理11.2.1 设(H_1)、(H_2)、(H_3)、(H_4)满足。又设f在

$[t_0, t_0+a] \times C_F$上是一致连续的。令 $r = \min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}$。则初值问题(11.1.1)必至少有一解 $x(t)$，定义在$[t_0-\tau, t_0+r]$上，并且

$$x(t) \in F, \quad \forall t \in [t_0, t_0+r].$$

证 取$\{\varepsilon_n\} \subset (0,1)$，$\varepsilon_n$单调递减趋近于0．令$\{x_n(t)\}$是初值问题(11.1.1)的 ε_n-逼近解序列，其性质如定理11.1.1所述．根据定理11.1.2，为证明定理11.2.1的结论，我们只需证明$\{x_n(t)\}$有一子列在$[t_0-\tau, t_0+r]$上一致收敛即可．为此，根据定理1.1.3，我们仅需证明对任给 $t \in [t_0, t_0+r]$，$\{x_n(t)\}$是E中的相对紧集即可（根据定理11.1.1，我们已经知道$\{x_n(t)\}$是一致有界且等度连续的）．

定义

$$p(t) = \alpha(\{x_n(t)\}), \quad \forall t \in [t_0, t_0+r]$$

则易知对每个自然数k,

$$p(t) = \alpha(\{x_n(t) \mid n \geqslant k\}) = \alpha(\{x_n(\tau_n(t)) \mid n \geqslant k\} \qquad (11.2.1)$$

$$\alpha(\{x_n(t) - hf(\tau_n(t), x_{n,\tau_n(t)})\})$$
$$= \alpha(\{x_n(\tau_n(t)) - hf(\tau_n(t), x_{n,\tau_n(t)})\}). \qquad (11.2.2)$$

设 $t \in (t_0, t_0+r)$，若 $t \in (\sigma_i^n, \sigma_{i+1}^n)$，则由（11. 2. 1)、(11.2.2)两式，可知

$$\frac{p(t)-p(t-h)}{h} = \frac{1}{h}[\alpha(\{x_n(\tau_n(t))\}) - \alpha(\{x_n(t-h)\})]$$

$$\leqslant \frac{1}{h}[\alpha(\{x_n(\tau_n(t))\}) - \alpha(\{x_n(t) -$$
$$-hf(\tau_n(t), \quad x_{n,\tau_n(t)})\})]$$
$$+\frac{1}{h}[\alpha(\{x_n(t) - x_n(t-h) - hf(\tau_n(t), x_{\tau_n(t)})\})]$$

$$= \frac{1}{h}[\alpha(\{x_n(\tau_n(t))\}) - \alpha(\{x_n(\tau_n(t))$$

$$-hf(\tau_n(t),\ x_{n,\tau_n(t)})\})]$$

$$+\frac{1}{n}[\alpha(\{x_n(t)-x_n(t-h)-hf(\tau_n(t),x_{n,\tau_n(t)})\})].$$

$$(11.2.3)$$

根据定理11.1.1的性质(iv)，

$$\|x_n(t)-x_n(t-h)-hf(\tau_n(t),x_{n,\tau_n(t)})\|$$

$$\leqslant\int_{t-h}^{t}\|x_n'(s)-f(\tau_n(s),x_{n,\tau_n(s)})\|ds$$

$$+\int_{t-h}^{t}\|f(\tau_n(s),\ x_{n,\tau_n(s)})$$

$$-f(\tau_n(t),\ x_{n,\tau_n(t)})\|ds$$

$$\leqslant\varepsilon_n h+\int_{t-h}^{t}\|f(\tau_n(s),x_{n,\tau_n(s)})$$

$$-f(\tau_n(t),x_{n,\tau_n(t)})\|ds. \qquad (11.2.4)$$

因为 $f(t,x)$是一致连续的，所以对任给 $\eta>0$，存在$\delta=\delta(\eta)>0$，使得只要

$$|\tau_n(s)-\tau_n(t)|<\delta,\quad \|x_{n,\tau_n(s)}-x_{n,\tau_n(t)}\|_0<\delta,$$

就有

$$\|f(\tau_n(s),\ x_{n,\tau_n(s)})-f(\tau_n(t),\ x_{n,\tau_n(t)})\|<\eta.$$

另一方面，

$$|\tau_n(s)-\tau_n(t)|\leqslant|t-s|+\varepsilon_n\leqslant h+\varepsilon_n,$$

$$\|x_n(\tau_n(s)+T)-x_n(\tau_n(t)+T\|$$

$$\leqslant\begin{cases} M|\tau_n(s)-\tau_n(t)|\leqslant M(h+\varepsilon_n),\ \text{若}\ t_0\leqslant\tau_n(s)+T,\\ \|\varphi_0(\tau_n(s)+T-t_0)-\varphi_0(\tau_n(t)+T-t_0)\|,\text{若}\tau_n(t)+T\leqslant t_0,\\ \|\varphi(\tau_n(s)+T-t_0)-\varphi_0(0)\|+\|x_n(t_0)-x_n(\tau_n(t)+T)\|,\\ \qquad\qquad \text{若}\ t_0-\tau_n(T)<T<t_0-\tau_n(s). \end{cases}$$

由于 φ_0 在 $[-\tau,0]$ 是一致连续的，所以存在 $\overline{\delta}>0$，使得只要 $\tau_n(s)\in[t_0,\ t_0+r]$，$\tau_n(t)\in[t_0,t_0+r]$，

$$|\tau_n(s)-\tau_n(t)|\leqslant h+\varepsilon_n<\overline{\delta},$$

就有

$$\|\varphi_0(\tau_n(s))-\varphi_0(\tau_n(t))\|_0<\frac{\delta}{2}.$$

从而

$$\|x_n(\tau_n(s)+T)-x_n(\tau_n(t)+T\|$$

$$\leqslant\begin{cases} M(h+\varepsilon_n),\ 若T\geqslant t_0-\tau_n(s), \\ \dfrac{\delta}{2},\ 若T\leqslant t_0-\tau_n(t), \\ \dfrac{\delta}{2}+M(h+\varepsilon_n),\ t_0-\tau_n(t)\leqslant T\leqslant t_0-\tau_n(s). \end{cases}$$

取 $m=m(\delta)$ 充分大，$\widetilde{h}$ 充分小，使当 $n\geqslant m(\delta)$，$h<\widetilde{h}$ 时有

$$\varepsilon_n<\eta,\quad h+\varepsilon_n<\overline{\delta},\ M(h+\varepsilon_n)\leqslant\frac{\delta}{2},$$

则有

$$\frac{1}{h}\|x_n(t)-x_n(t-h)-hf(\tau_n(t),\ x_{n,\tau_n(t)})\|$$
$$\leqslant\varepsilon_n+\eta<2\eta.$$

因此

$$\frac{1}{h}\alpha(\{x_n(t)-x_n(t-h)-hf(\tau_n(t),\ x_{n,\tau_n(t)})\})$$
$$=\alpha\left(\left\{\frac{x_n(t)-x_n(t-h)}{h}-f(\tau_n(t),\ x_{n,\tau_n(t)})\,\middle|\,n\geqslant m(\eta)\right\}\right)$$
$$\leqslant 2(2\eta)$$

从而

$$\lim_{\overline{h\to 0^+}}\frac{1}{h}\alpha(\{x_n(t)-x_n(t-h)-hf(\tau_n(t),\ x_{n,\tau_n(t)})\})\leqslant 4\eta.$$

由η的任意性，可知有

$$\lim_{\overline{h\to 0^+}}\frac{1}{h}\alpha(\{x_n(t)-x_n(t-h)-hf(\tau_n(t),x_{n,\tau_n(t)})\})=0.$$

所以由（11.2.3）式，有

$$D_-p(t)\leqslant\lim_{\overline{h\to 0^+}}\frac{1}{n}[\alpha\{x_n(\tau_n(t))\}$$
$$-\alpha(\{x_n(\tau_n(t))-hf(\tau_n(t),x_{n,\tau_n(t)})\})].$$

对每个自然数N，定义

$$\Phi_N^t=\{x_{n,\tau_n(t)}\mid n\geqslant N\}.$$

下证当N充分大时有

$$\Phi_N^t\subset C_T^t(b). \tag{11.2.5}$$

事实上，我们有

$$\|x_n(\tau_n(t)+T)-y(t+T)\|$$

$$=\begin{cases}\|x_n(\tau_n(t)+T)-x_n(t_0)\|\leqslant Mr\leqslant b,\text{若}\tau_n(t)+T\geqslant t_0,\\ \|\varphi_0(\tau_n(t)+T-t_0)-\varphi_0(t+T-t_0)\|,\text{若}\ t+T\leqslant t_0,\\ \|\varphi_0(\tau_n(t)+T-t_0)-\varphi_0(0)\|,\text{若}\tau_n(t)+T\leqslant t_0\leqslant t_0+T.\end{cases}$$

取 $\delta_{\varphi_0}(b)>0$，使得只要$|t-\tau_n(t)|<\delta_{\varphi_0}(b)$,就有

$$\|x_{n,\ \tau_n(t)}-y_t\|_0\leqslant b$$

取N充分大，使当$n\geqslant N$时

$$|t-\tau_n(t)|\leqslant\varepsilon_n\leqslant\varepsilon_N<\delta_{\varphi_0}(b),$$

从而$\|x_{n,\tau_n(t)}-y_t\|_0\leqslant b$，即(11.2.5)式成立。

由(H_3)容易证明

$$D_-p(t)\leqslant g(t,p(t))$$

因此，根据定理1.2.6，

$$p(t)\leqslant r(t,t_0,0),$$

其中 $r(t,t_0,0)$是

$$u'=g(t,u),\ u(t_0)=0$$

的最大解．根据(H_4)，$p(t)\equiv 0$．证完．□

注11.2.1 定理11.2.1中的假设(H_2)不能改为

$$\varliminf_{h\to 0^+}\frac{1}{h}d(\varphi(0)+hf(t,\varphi),F)=0,$$

$$\forall\varphi\in\{\varphi\in C\,|\,\varphi(s)\in F,\text{对}s\in[-\tau,0]\}. \quad (11.2.6)$$

下面举一个反例．取$E=R'$，令

$$F=(-\infty,0]\times\left\{\frac{1}{n}\,|\,n\geqslant 1,\ n\text{为自然数}\right\}.$$

定义

$$T(x)=\begin{cases}-x, & \text{若}x<0,\\ 0, & \text{若}x\geqslant 0;\end{cases}$$

设 $f:C[[-1,0],R^1]\to R^1$ 由下式定义

$$f(\varphi)=T(\varphi(-1)). \quad (11.2.7)$$

则容易证明f满足(11.2.6)式．事实上设$\varphi\in C[[-1,0],R^1]$，$\varphi(s)\in F(\forall s\in[-1,0])$，如果$\varphi(0)>0$，则$\varphi(s)$是$[-1,0]$上的连续函数，且对$s\in[-1,0]$，$\varphi(s)=\frac{1}{n}$，$n$为某整数．于是，对任给$h>0$，有

$$\frac{1}{h}d(\varphi(0)+hf(\varphi),F)=\frac{1}{h}d\left(\frac{1}{n},F\right)=0$$

这表明(11.2.6)式成立；若$\varphi(0)\leqslant 0$，则易知有

$$\frac{1}{h}d(\varphi(0)+hf(\varphi),F)=$$

$$\begin{cases} \frac{1}{h}d(\varphi(0),F)=0, & \varphi(-1)=0 \text{ 时} \\ \frac{1}{h}\alpha(\varphi(0)-h\varphi(-1),F), & \varphi(-1)<0 \text{ 时} \end{cases}$$

故（11．2．6）式也成立．但可以举出使方程（11．1．1）无解的例子．事实上，令

$$\varphi_0(s)=s,\ \forall s\in[-1,0],$$

设初值问题(11.1.1)有解 $x(t)$，则

$$x'(t_0)=f(\varphi_0)=T(-1)=1>0,\quad x(t_0)=0,$$

矛盾．下面说明由(11.2.7)式定义的f不满足(H_2)．事实上，令$\varphi\in C_F$，$\varphi(0)=1$，$\varphi(-1)=-1$，则

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}d(\varphi(0)+hf(\varphi),F)=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}d(1+h,F)$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{1+h-1}{h}=1,$$

故(H_2)不满足．

11.3 耗散型条件

本节讨论在耗散型条件下方程(11.1.1)解的存在唯一性．

定理11.3.1 设(H_1)、(H_2)、(H_4)满足、设F是闭凸集，并且f满足．

(H_5)：对$t\in[t_0,t_0+a]$，有

$$\|f(t,\varphi)-f(t,\psi)\|\leqslant g(t,\|\varphi(0)-\psi(0)\|),\quad (11.3.1)$$

其中$\varphi,\psi\in C_F^t(b)$，使得

$$\|\varphi(T)-\psi(T)\|\leqslant\|\varphi(0)-\psi(0)\|,\quad \forall T\in[-\tau,0].$$

则初值问题(11.1.1)在 $[t_0-\tau,\ t_0+r]$ 上有唯一解 $x(t)$，并且

$$x(t)\in F,\ \forall t\in[t_0,t_0+r],$$

其中$r=\min\{a,\ \dfrac{b}{M}\}$.

证 取$\{\varepsilon_n\}\subset(0,1)$，$\varepsilon_n$ 单调递减趋近于 0．令 $x_m(t)$ 和 $x_n(t)$分别是初值问题(11.1.1)的 ε_m-逼近解和ε_n-逼近解，其性质如定理11.1.1所述．因为F是凸集，所以对 $t\in[t_0,\ t_0+r]$，

$$x_n(t)\in F,\quad x_m(t)\in F. \tag{11.3.2}$$

定义

$$m(t)=\|x_m(t)-x_n(t)\|,\quad t\in[t_0,\ t_0+r]$$

当 $t\in(\sigma_i^n,\ \sigma_{i+1}^n)\cap(\sigma_j^m,\ \sigma_{j+1}^m)$时

$$\begin{aligned}D^+m(t)&\leqslant\|x_n'(t)-x_m'(t)\|\\&\leqslant\|x_n'(t)-f(\sigma_i^n,\ x_{n,\sigma_i^n})\|\\&\quad+\|x_m'(t)-f(\sigma_j^m,\ x_{m,\sigma_j^m})\|\\&\quad+\|f(\sigma_i^n,\ x_{n,\sigma_i^n})-f(t,\ x_{n,t})\|\\&\quad+\|f(\sigma_j^m,\ x_{m,\sigma_j^m})-f(t,\ x_{m,t})\|\\&\quad+\|f(t,x_{n,t})-f(t,\ x_{m,t})\|.\end{aligned} \tag{11.3.3}$$

由定理11.1.1的证明知当$(t,\varphi)\in[\sigma_i^n,\sigma_{i+1}^n]\times C_F$，$\|\varphi-x_{n,\sigma_i^n}\|_0\leqslant 2M\delta_i^n$，$|t-\sigma_i^n|\leqslant\delta_i^n$ 时有

$$\|f(t,\varphi)-f(\sigma_i^n,x_{n,\sigma_i^n})\|\leqslant\varepsilon_n,$$

所以由定理11.1.1性质(iv)及(11.3.3)式，有

$$D^+m(t)\leqslant2(\varepsilon_n+\varepsilon_m)+\|f(t,x_{n,t})-f(t,x_{m,t})\|.$$

如果 t 满足$\|x_{n,t}(T)-x_{m,t}(T)\|\leqslant\|x_n(t)-x_m(t)\|$，则利用$(H_6)$，可知

$$D^+m(t)\leqslant2(\varepsilon_n+\varepsilon_m)+g(t,m(t))|. \tag{11.3.4}$$

所以$m(t)$：$[t_0-\tau,\ t_0+r]\to R^+$是连续函数，并且对$t\in[t_0,t_0+r]\backslash S$(其中$S$是满足 $m_t(T)\leqslant m(t)$ 的 t 组成的集合，它至多为一可数集)，$m(t)$满足微分不等式(11.3.4)．注意到 $m(t_0)=0$，故根据定理1.2.6，有

$$m(t)\leqslant r_{n,m}(t,t_0,0),\ t\in[t_0,t_0+r],$$

这里，$r_{n,m}(t,t_0,0)$是初值问题

$$u'=g(t,u)+2(\varepsilon_n,\varepsilon_m),\ u(t_0)=0$$

的最大解．根据定理1.2.5，当 $m,n\to\infty$时 $r_{n,m}(t,t_0,0)\to r(t,t_0,0)$关于 $t\in[t_0,t_0+r]$一致成立，其中 $r(t,t_0,0)$是初值问题

$$u'=g(t,u),\ u(t_0)=0$$

的最大解．由(H_4)知 $r(t,t_0,0)\equiv 0$．这表明关于 $t\in[t_0,t_0+r]$ 一致有

$$\lim_{m,n\to\infty}\|x_n(t)-x_m(t)\|=0\text{．}$$

这意味着$\{x_n(t)\}$在$[t_0-\tau,\ t_0+r]$上一致收敛于抽象函数$x(t)$．根据定理11.1.2，$x(t)$是初值问题(11.1.1)的解．由(11.3.2)式知 $x(t)\in F(\forall t\in[t_0,t_0+r])$．

下证解的唯一性．设 $x(t)$，$\widetilde{x}(t)$：$[t_0-\tau,\ t_0+r]\to E$是初值问题(11.1.1)的两个解，使得

$$x(t),\ \widetilde{x}(t)\in F\cap B[\varphi_0(0),b],\ \forall t\in[t_0,t_0+r];$$

其中 $B[\varphi_0(0),b]=\{x\in E\mid\|x-\varphi_0(0)\|\leqslant b\}$．令

$$m(t)=\|x(t)-\widetilde{x}(t)\|,$$

则仿前面的证明可知对 $t>t_0$，$m_t(T)\leqslant m(t)$，有

$$D^+m(t)\leqslant\|f(t,x_t)-f(t,\widetilde{x}_t)\|\leqslant g(t,m(t))\text{．}$$

因为 $m_{t_0}\equiv 0$，故由定理1.2.6及假设(H_4) 知 $m(t)\equiv 0$，即

$x(t)\equiv\tilde{x}(t)$. □

11.4 附　　注

本章的结果选自Leela 和 Moauro〔1〕以及 Lakshmikantham, Leela 和Moauro〔1〕. 若干进一步的讨论可见 Lakshmikantham 和 leela〔2〕, Webb〔1〕、〔2〕.

第十二章 Banach空间常微分方程理论的某些应用

Banach 空间常微分方程理论在数学的许多领域，例如在不动点理论、临界点理论、特征值问题、偏微分方程、分歧理论等中都有广泛的应用．也正是在这些应用中，Banach 空间常微分方程理论才得以更迅速的发展．

限于篇幅，在本书中我们不可能详细叙述这些应用的所有方面，而只能初步地给出了 Banach 空间常微分方程理论在临界点理论、不动点理论和特征值问题中的某些应用．

12.1 在临界点理论中的应用

设E是 Banach 空间，$f: E\to R^1$是一个泛函，并且在E上是处处连续可微的，即对一切 $x\in E$，f 在 x 处都是Frechet可微的，并且 $f'(x)$在E上关于x连续（这样的泛函称为是 C^1 泛函）．

定义12.1.1 设 $x_0\in E$，使

$$f'(x_0)=\theta,$$

则称 x_0是 $f(x)$的一个临界点．如果 $c\in R^1$，并且存在 $f(x)$的一个临界点 x_0，使 $f(x_0)=c$，则称 c 是 $f(x)$的一个临界值．

临界点理论的基本内容就是研究泛函的临界点和临界值的各种性质．Banach 空间常微分方程理论，为临界点理论的研

究，提供了强有力的工具。

为了突出本节的基本思想而不纠缠于细节，在本节中我们将假定E是 Hilbert 空间，$f'(x)$ 满足局部 Lipschitz 条件。在注12.1.1和注12.1.3中，我们将指出在更为广泛的 条 件 下（即不需要假定 $f'(x)$满足局部 Lipschitz 条件，并且在定理12.1.1和定理12.1.2中不需假定 E 是 Hilbert 空间），本节的结论也都成立。

定义12.1.2设 $c\in R'$，并存在 $x_n\in E$，使得

$$f'(x_n)\to\theta,\ f(x_n)\to c,$$

则称 c 是 $f(x)$的渐近临界值，$\{x_n\}$是 $f(x)$ 相应于 c 的渐近临界点列。

任给 $x_0\in E$，考察E上的常微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-f'(x) \\ x(0)=x_0. \end{cases} \tag{12.1.1}$$

由于$-f'(x)$满足局部 Lipschitz 条件，故根据定理2.2.2，初值问题(12.1.1)的右行饱和解 $x(t,\ x_0)$存在，下设其最大定义区间为$[0,\ T(x_0))$。

引理12.1.1 设

$$c=\lim_{t\to T(x_0)-0} f(x(t,x_0))>-\infty. \tag{12.1.2}$$

则$T(x_0)=+\infty$，并且 c 是 $f(x)$的渐近临界值。

证 对任给 $t\in[0,T(x_0))$（下记 $x(t)\equiv x(t,x_0)$），

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f(x(t)) &= (f'(x(t)),\ x'(t)) \\ &= -\|x'(t)\|^2\leqslant 0, \end{aligned} \tag{12.1.3}$$

故 $f(x(t))$关于 t 是减函数。因此，

$$c \leqslant f(x(t)) \leqslant f(x_0), \ \forall t \in [0, T(x_0)). \qquad (12.1.4)$$

当 $0 \leqslant t_1 < t_2 < T(x_0)$ 时，由(12.1.3)(12.1.4)两式可知

$$\|x(t_2) - x(t_1)\| \leqslant \int_{t_1}^{t_2} \|x'(t)\| dt$$

$$\leqslant \left(\int_{t_1}^{t_2} \|x'(t)\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} (t_2 - t_1)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(-\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d}{dt} f(x(t))\right] dt\right)^{\frac{1}{2}} (t_2 - t_1)^{\frac{1}{2}}$$

$$= [f(x(t_1)) - f(x(t_2))]^{\frac{1}{2}} \cdot (t_2 - t_1)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant (f(x_0) - c)^{\frac{1}{2}} (t_2 - t_1)^{\frac{1}{2}}. \qquad (12.1.5)$$

如果 $T(x_0) < +\infty$，则由(12.1.5)式可知，当 $t_1, t_2 \to T(x_0) - 0$ 时，$\|x(t_2) - x(t_1)\| \to 0$，从而极限

$$\lim_{t \to T(x_0) - 0} x(t) = x^*$$

存在。根据定理2.2.3，$x^* \in \partial E$。但 $\partial E = \phi$，故产生矛盾。从而$T(x_0) = +\infty$。

由（12.1.3）式可知

$$\|f'(x(t))\|^2 = -\frac{d}{dt} f(x(t)),$$

所以对任给 $t > 0$，有

$$\int_0^t \|f'(x(t))\|^2 dt = f(x(0)) - f(x(t))$$

$$= f(x_0) - f(x(t)) \leqslant f(x_0) - c.$$

从而

$$\int_0^{+\infty} \|f'(x(t))\|^2 dt < +\infty.$$

所以必存在 $t_n > 0$，$t_n \to +\infty$，使 $f'(x(t_n)) \to \theta$。显然有$f'(x(t_n))$

$\to c$。所以 c 是渐近临界值．证完．□

为保证渐近临界值是临界值，我们需要对 $f(x)$ 加上某种“紧性条件”，即所谓 $P.S.$ 条件：

定义12.1.3 若 $\{x_n\}\subset E$，$\{f(x_n)\}$ 有界，$f'(x_n)\to\theta$ 蕴含着 $\{x_n\}$ 有收敛子列，则称泛函 $f(x)$ 在 E 中满足 $P.S.$ 条件（又称Palais－Smale 条件）。

定理12.1.1 设 $f(x)$ 在 E 中是下方有界的，则

$$c=\inf_{x\in E} f(x) \tag{12.1.6}$$

是渐近临界值；若 $f(x)$ 又在 E 中满足 $P.S.$ 条件，则 c 是 $f(x)$ 的临界值．

证 对每个自然数 n，取 $x_0^n\in E$，使

$$c<f(x_0^n)<c+\frac{1}{n}. \tag{12.1.7}$$

考察初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-f'(x(t)) \\ x(0)=x_0^n. \end{cases} \tag{12.1.8}$$

由引理12.1.1知

$$c_n=\lim_{t\to+\infty} f(x(t,x_0^n))\geqslant c$$

是 $f(x)$ 的渐近临界值，其中 $x(t,x_0^n)$ 是初值问题(12.1.8)的右行饱和解，其最大存在区间为$[0,+\infty)$．于是，由引理12.1.1的证明知存在

$$x_n\in\{x(t,x_0^n)\mid t\in[0,+\infty)\},$$

使得 $\|f'(x_n)\|\leqslant\dfrac{1}{n}$，并且

$$c\leqslant c_n\leqslant f(x_n)\leqslant f(x_0^n)\leqslant c+\frac{1}{n}.$$

令 $n\to\infty$，即知 c 是渐近临界值，并且$\{x_n\}$ 是相应于 c 的渐近临界点列。

若 $f(x)$在E中满足$P.S.$条件，则显然$\{x_n\}$ 有一收敛子列$\{x_{n_i}\}$收敛于某 $x^*\in E$，所以

$$f(x^*)=\lim_{i\to\infty} f(x_{n_i})=c$$

$$f'(x^*)=\lim_{i\to\infty} f'(x_{n_i})=\theta,$$

从而 c 是 $f(x)$的临界值。证完。□

定理12.1.2 设D是E中的开集，$x_1\in D$，$x_2\in E\backslash\overline{D}$，满足

$$\inf_{x\in\partial D} f(x)>\max\{f(x_1),\ f(x_2)\},\qquad(12.1.9)$$

其中∂D是D在E中的边界。令

$$\Phi=\{h(t):[0,1]\to E\text{连续}\,|\,h(0)=x_1,\ h(1)=x_2\},$$

$$c=\inf_{h\in\Phi}\max_{t\in[0,1]} f(h(t)),\qquad(12.1.10)$$

则 c 是渐近临界值。若又设 $f(x)$在E中满足$P.S.$条件，则c是$f(x)$的临界值。

证 显然

$$c\geqslant\inf_{x\in\partial D} f(x).\qquad(12.1.11)$$

令U是 $f_c^<=\{x\in E\,|\,f(x)<c\}$ 中含有x_1的道路连通分支，则U是E中的开集。并且容易知道

$$x_2\overline{\in}U.\qquad(12.1.12)$$

任给 $x_0\in E$，考察初值问题(12.1.1)。令 $x(t,x_0)$ 是初值问题(12.1.1)的右行饱和解，其最大存在区间为$[0,T(x_0))$。令

$$U^*=\{x_0\in E\,|\,\text{存在 } t'\in[0,T(x_0)),\ \text{使 } x(t',x_0)\in U\}.$$

根据 Banach 空间常微分方程解对初值的连续相依性定理（定理2.2.3），易知U^*是E中的开集。下面证明

$$x_2 \overline{\in} U^*, \tag{12.1.13}$$

$$\inf_{x\in\partial U^*} f(x)=\inf_{x\in\partial U} f(x)=c. \tag{12.1.14}$$

先证(12.1.13)式.用反证法,若$x_2\in U^*$,则存在$t'\in[0,T(x_2))$,使$x(t', x_2)\in U$。注意到$x_2\overline{\in} U$,故必存在$t''\in[0,t')$,使$x(t'', x_2)\in\partial U$。由(12.1.3)式可知$f(x(t,x_2))$是t的减函数，所以

$$\begin{aligned} c&=f(x(t'',x_2))\leqslant f(x_2)\\ &<\inf_{x\in\partial D} f(x)\leqslant c. \end{aligned}$$

产生矛盾.故(12.1.13)式成立.再证(12.1.14)式.因为$x_1\in U^*$, $x_2\overline{\in} U^*$，故对任给连结x_1和x_2的道路$h\in\Phi$，$\{h(t)|t\in[0, 1]\}\cap\partial U^*\neq\phi$。所以

$$\inf_{x\in\partial U^*} f(x)\leqslant\max_{t\in[0,1]} f(h(t)),$$

从而

$$\inf_{x\in\partial U^*} f(x)\leqslant\inf_{h\in\Phi}\max_{t\in[0,1]} f(h(t))=c. \tag{12.1.15}$$

但另一方面，若

$$\inf_{x\in\partial U^*} f(x)<c. \tag{12.1.16}$$

则存在$x^*\in\partial U^*$及x^*在E中的球形开邻域$V(x^*,\delta)$，使对任给$x\in V(x^*, \delta)$，有$f(x)<c$。取$x'\in V(x^*, \delta)\cap U^*$。注意到$V(x^*, \delta)\cap U=\phi$，故$x'\overline{\in} U$。但由$x'\in U^*$知存在$t_1\in[0, T(x'))$，使$x(t_1, x')\in U$，从而存在$t_2\in[0, t_1)$，使$x(t_2, x')\in\partial U$。由于$f(x(t,x'))$是$t$的减函数,故

$$c=f(x(t_2,x'))\leqslant f(x')<c.$$

产生矛盾．故(12.1.16)式不可能成立．因此，由(12.1.15)式

即知（12.1.14）式成立.

任给 $x_0\in\partial U^*$，考察初值问题(12.1.1).下证

$$\{x(t,x_0)\,|\,t\in[0,T(x_0))\}\subset\partial U^*. \qquad (12.1.17)$$

用反证法，设(12.1.17) 式不成立. 则存在 $t_1\in[0, T(x_0))$，使 $x(t_1, x_0)\,\overline{\in}\,\partial U^*$.由$U^*$的定义知 $x(t_1,x_0)\overline{\in}U^*$，故$x(t_1, x_0)\in E\backslash\overline{U^*}$.因为$E\backslash\overline{U^*}$是$E$中的开集，故根据 Banach 空间常微分方程解对初值的连续相依性定理(定理2.2.3),对 $x(t_1,x_0)$ 的某一开邻域$U_1\subset E\backslash\overline{U^*}$，必存在 x_0 的某一开邻域 $V\subset E$,使得只要 $x'_0\in V$，则相应的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-f'(x)\\[2ex] x(0)=x'_0\end{cases}$$

的右行饱和解 $x(t,x'_0)$中，至少有某 $t'\in[0,T(x'_0))$，使 $x(t', x'_0)\in U_1\subset E\backslash\overline{U^*}$. 我们可以选取 x'_0，使得 $x'_0\in V\cap U^*$，但因为 $x'_0\in U^*$，故对一切 $t\in[0, T(x'_0))$，$x(t, x'_0)\in U^*$. 此与 $x(t',x'_0)\subset E\backslash\overline{U^*}$矛盾. 从而可知(12.1.17)式成立.由(12.1.16)、(12.1.17) 两式并仿定理12.1.1的证明即可知 c 是 $f(x)$ 的渐近临界值，并且当 f 满足 $P.S.$条件时，c 是 $f(x)$ 的临界值. 证完. □

注12.1.1 在定理12.1.1和定理12.1.2中，假定了 E 是 Hilbert 空间，并且 $f(x)$ 满足局部 Lipschitz 条件.事实上，这两个限制都是可以删掉的. 设 E 是 Banach 空间，$f: E\to R^1$ 是C^1泛函，$f\not\equiv\text{const}$. 令 $K=\{x\in E\,|\,f'(x)=\theta\}$，$X=E\backslash K$. 可以证明，必存在算子 $v: X\to E$，满足

(i) $\|v(x)\|<2\|f'(x)\|$，$\forall x\in X$;

(ii) $(f'(x),v(x))>\|f'(x)\|^2$, $\forall x\in X$;

(iii) v是局部 Lipschitz 映射.

满足上述条件的算子 v 称为是 $f(x)$的伪梯度算子.利用 v 代替 $f'(x)$，考察初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -v(x) \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{12.1.18}$$

则利用与定理12.1.1和定理12.1.2本质上相同的证明方法（除了某些细节性的变动外），可以证明对任意 Banach 空间中的 C^1泛函 $f(x)$，定理12.1.1和定理12.1.2的结论都成立．其详细讨论可参见郭大钧〔1〕.

下面我们仍假定 E 是 Hilbert 空间，$f(x): E \to R^1$是C^1泛函，满足局部 Lipschitz 条件．设M是E中的凸闭集，这里，我们不假定M有界，也不假定M有内点．把 $f(x)$表为

$$f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 - g(x) \tag{12.1.19}$$

的形式，并令

$$Ax = g'(x). \tag{12.1.20}$$

定义12.1.4 如果由（12.1.20）式确定的算子A满足

$$AM \subset M, \tag{12.1.21}$$

则称 $f(x)$在M上满足 Schauder 型条件.

引理12.1.2 设 $f(x)$ 在M上满足 Schauder 型条件．设 $x_0 \in M$，$x(t, x_0)$是初值问题(12.1.1)的右行饱和解，$[0, T(x_0))$是$x(t, x_0)$的最大存在区间.则

$$\{x(t, x_0) \mid t \in [0, T(x_0))\} \subset M. \tag{12.1.22}$$

证 设（12.1.22）式不成立．令

$$t^* = \sup\{\bar{t} \mid 对 t \in [0, \bar{t}],\ x(t, x_0) \in M\}.$$

则有 $0 \leqslant t^* < T(x_0)$，且 $x(t^*, x_0) \in M$。考察

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -f'(x) \\ x(o) = x(t^*, x_0). \end{cases} \tag{12.1.23}$$

因为M是凸闭集，$AM \subset M$，所以对 $x \in M$, $0 < \lambda < 1$ 有

$$\begin{aligned} x + \lambda(-f'(x)) &= x + \lambda(Ax - x) \\ &= \lambda Ax + (1-\lambda)x \in M, \end{aligned}$$

所以 $d(x + \lambda(-f'(x)), M) = 0$。于是，对任给$x \in M$，有

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{1}{\lambda} d(x + \lambda(-f'(x)), M) = 0.$$

根据系2.3.1（注意 $f'(x)$满足局部 Lipschitz 条件），存在 $\delta > 0$，使初值问题(12.1.23)在$[0,\delta)$上有唯一解$\overline{x}(t)$，并且当 $t \in [0, \delta]$时 $\overline{x}(t) \in M$。由常微分方程解的半群性质知当 $t \in [0, t^* + \delta)$时，$x(t, x_0) \in M$。此与 t^*的定义矛盾。证完。□

定理12.1.3 设 $f(x)$在M上满足 Schauder 型条件，并且在M上有下界。则

$$c = \inf_{x \in M} f(x)$$

是 $f(x)$的渐近临界值。若又假定$f(x)$在M上满足$P.S.$条件，即$\{x_n\} \subset M$，$\{f(x_n)\}$有界，$f'(x_n) \to \theta$ 蕴含着 $\{x_n\}$ 有收敛子列，则 c 是 $f(x)$的临界值。

证 利用引理12．1．2，并仿定理12．1．1 的证明方法．证完。□

定理12.1.4 设 $f(x)$在M上满足 Schauder 型条件。设 D 是M中的非空开集，$x_1 \in D$，$x_2 \in M \setminus \overline{D}$，满足

$$\inf_{x \in \partial D} f(x) > \max\{f(x_1), f(x_2)\}, \tag{12.1.24}$$

其中∂D是D相对于M的边界，令

$$\Phi=\{h(t):[0,1]\to M\text{连续}\mid h(0)=x_1,h(1)=x_2\},$$

$$c=\inf_{h\in\Phi}\max_{t\in[0,1]}f(h(t)). \tag{12.1.25}$$

则c是$f(x)$的渐近临界值．若进一步假定$f(x)$在M上满足$P.S.$条件，则c是$f(x)$的临界值．

证 令U是$f_c^<=\{x\in M\mid f(x)<c\}$中含有$x_1$的道路连通分支，则$U$是$M$中的开集．令

$$U^*=\{x_0\in M\mid \text{存在}\ t'\in[0,T(x_0)),\text{使}\ x(t',x_0)\in U\}.$$

仿定理12.1.2之证明可以证得U^*是M中的开集，$x_2\overline{\in}U^*$，

$$\inf_{x\in\partial U^*}f(x)=c, \tag{12.1.26}$$

其中∂U^*是U^*相对于M的边界．任给$x_0\in\partial U^*$，仿定理12.1.2之证明可以证得

$$\{x(t,x_0)\mid t\in[0,T(x_0))\}\subset\partial U^*. \tag{12.1.27}$$

由(12.1.26)、(12.1.27)两式并仿定理12.1.1的证明即知c是$f(x)$的渐近临界值，并且当$f(x)$在M上满足$P.S.$条件时，c是$f(x)$的临界值．证完．□

注12.1.2 在定理12.1.3和定理12.1.4中，令$M=E$，即得定理12.1.1和定理12.1.2.因此定理12.1.3和定理12.1.4的推广．

注12.1.3 在定理12.1.3和定理12.1.4中，假定了$f(x)$满足局部Lipschitz条件．这一条件是可以删掉的．事实上，设E是Hilbert空间，$f(x):E\to R^1$是C^1泛函，M是E中的凸闭集．设$f(x)$可以表为(12.1.19)式的形式，$Ax=g'(x)$，并且$AM\subset M$，则可以证明：存在算子$B:E\to E$，使得

(1) B在E上连续，在$E\backslash\{x\in E\mid f'(x)=\theta\}$上满足局部

Lipschitz 条件；

(ii) $BM \subset M$；

(iii) 若令 $V = I - B$，则对任给 $x \in E$，有

$$\|V(x)\| \leqslant 2\|f'(x)\|,\ (f'(x), V(x)) \geqslant \frac{1}{2}\|f'(x)\|^2.$$

用 V 代替 $f'(x)$，考察初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -V(x), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

其中 $x_0 \in M$。利用与定理12.1.3和定理12.1.4相同的方法（除了细节上的变动外），可以证明在不假定 $f(x)$ 满足局部 Lipschitz 条件的情况下，定理12.1.3和定理12.1.4 的结论成立。其详情见孙经先〔1〕、〔2〕。

12.2 在不动点理论中的应用

在本节中，我们利用 Banach 空间常微分方程理论，给出若干不动点定理。

定理12.2.1 设 E 是 Banach 空间，D 是 E 中的凸闭集，$A: D \to E$ 是一个映射。设存在常数 $0 < L < 1$，使得

$$\|Ax - Ay\| \leqslant L\|x - y\|,\ \forall x, y \in D, \tag{12.2.1}$$

并且

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{1}{\lambda} d(x + \lambda(Ax - x), D) = 0,\ \forall x \in \partial D. \tag{12.2.2}$$

则 A 在 D 中有唯一不动点。

证 考察 Banach 空间常微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}=Au-u \\ u(0)=x\in D \end{cases} \tag{12.2.3}$$

根据定理4.5.2，初值问题(12.2.3)在$[0,+\infty)$上有唯一的属于D的解$u(t,x)$。对某个固定的$t>0$，令

$$Ux=u(t,x), \tag{12.2.4}$$

则$U: D\to D$。令

$$m(t)=\|u(t,x)-u(t,y)\|,$$

则由引理1.3.2可知

$$\begin{aligned} m'_+(t)&=[u(t,x)-u(t,y),\ Au(t,x)-Au(t,y) \\ &\qquad -(u(t,x)-u(t,y))]_+ \\ &\leqslant[u(t,x)-u(t,y),\ Au(t,x)-Au(t,y)]_+ \\ &\qquad -[u(t,x)-u(t,y),u(t,x)-u(t,y)]_+ \\ &\leqslant\|Au(t,x)-Au(t,y)\|-\|u(t,x)-u(t,y)\| \\ &=-(1-L)m(t). \end{aligned}$$

所以

$$\|U(x)-Uy\|=\|u(t,x)-u(t,y)\|\leqslant\|x-y\|e^{-(1-L)t}. \tag{12.2.5}$$

从而$U:D\to D$是压缩映射。根据压缩映射原理，存在$x_0\in D$，使$Ux_0=x_0$。于是$u(s,x_0)$关于s是以t为周期的函数，即$u(s+t,\ x_0)=u(s,x_0)(\forall s\geqslant 0)$。由(10.2.5)式可知对任给$s\geqslant 0$，有

$$\begin{aligned} \|u(s,x_0)-x_0\|&=\|u(s+t,x_0)-x_0\|=\|Uu(s,x_0)-Ux_0\| \\ &\leqslant\|u(s,x_0)-x_0\|e^{-(1-L)t}. \end{aligned}$$

故$u(s,x_0)\equiv x_0$。从而易知$Ax_0-x_0=\theta$，即$Ax_0=x_0$。□

下面讨论非扩展映射的不动点定理。

引理12.2.1 设E是一致凸 Banach 空间，D是 E 中的有界闭凸集，$A:D\to E$是非扩展映射．则集合$(I-A)(D)$是E中的闭集．

这一引理的证明见F.E.Browder〔1〕定理8.4．

定理12.2.2 设E是一致凸 Banach 空间，D是 E 中的闭凸集，$A:D\to E$ 是非扩展映射．设

$$\lim_{\lambda\to 0^+}\frac{1}{\lambda}d(x+\lambda(Ax-x),\ D)=0\ ,\quad \forall x\in\partial D. \tag{12.2.6}$$

又设下列两条件之一成立：

(i) D有界；

(ii) $\lim\limits_{\|x\|\to\infty}\|x-Ax\|=+\infty$．

则A在D中必有不动点．

证 不失一般可设 $\theta\in D$．令$A_n=A-\frac{1}{n}I$．由(12.2.6) 式及定理5.1.1知：若 $\varphi\in E^*$，$\varphi(x)=\sup\limits_{y\in D}\varphi(y)$，$x\in\partial D$,则

$$\varphi(Ax-x)\leqslant 0\ .$$

注意到 $\theta\in D$，故 $\varphi(x)\geqslant 0$，从而

$$\varphi(A_nx-x)=\varphi(Ax-x)-\frac{1}{n}\varphi(x)$$

$$\leqslant-\frac{1}{n}\varphi(x)\leqslant 0$$

再利用定理5.1.1知

$$\lim_{\lambda\to 0^+}\frac{1}{\lambda}d(x+\lambda(A_nx-x),\ D)=0\ .$$

仿定理12.2.1的证明方法可以证得 A_n 在 D 中必有不动点．设x_n是A_n在D中的不动点．下证$\{x_n\}$ 有界．若 (i) 成立，则显然

$\{x_n\}$有界。故下设(ii)成立。此时

$$
\begin{aligned}
0 &\leqslant (x_n, x_n)_+ - (x_n,\ Ax_n - A\theta)_+ \\
&= (x_n,\ x_n - Ax_n + A\theta)_+ \\
&= (x_n,\ -\frac{1}{n}x_n + A\theta)_+ \\
&\leqslant -\frac{1}{n}\|x_n\|^2 + \|A\theta\|\|x_n\|,
\end{aligned}
$$

故有$\frac{1}{n}\|x_n\| \leqslant \|A\theta\|$。于是

$$
\|x_n - Ax_n\| \leqslant \frac{1}{n}\|x_n\| \leqslant \|A\theta\|.
$$

由条件(ii)即知$\{x_n\}$有界。根据引理12.2.1，并注意到

$$
\|x_n - Ax_n\| \leqslant \frac{1}{n}\|x_n\| \to \theta,
$$

可知必存在$x^* \in D$，使 $x^* = Ax^*$。证完。□

下面利用非紧性测度研究不动点定理。

定理12.2.3 设E是 Banach 空间，D是 E 中的有界凸闭集，$A: D \to E$是连续映射，并且存在$0 \leqslant k < 1$，使对任给D中的有界集B，都有

$$
\alpha(A(B)) \leqslant k\alpha(B). \tag{12.2.7}
$$

设A满足边界条件(12.2.2)，并且对每个 $x \in D$，初值问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{du}{dt} = Au - u \\
u(0) = x
\end{cases} \tag{12.2.8}
$$

至多有一个解。则A在D中必有不动点。

证 由(12.2.7)式可知对D中任给的有界集B，都有

$$
\alpha((A-I)(B)) \leqslant (k+1)\alpha(B).
$$

所以根据定理3.3.1（并注意到初值问题（12.2.8）至多有一个解），对任给$x\in D$，初值问题(12.2.8)有唯一的定义在〔0，$+\infty$）上的解$u(t, x)$，并且对任给$t\geqslant 0$，$u(t,x)\in D$.对任给$t\geqslant 0$，令

$$U(t)x=u(t,x),\quad \forall x\in D.$$

则$U(t):D\to D$是连续的。任给$B\subset D$，令

$$\varphi(t)=\alpha(e^tU(t)B).$$

当$h>0$时（下令$I_h=[t-h,t]$）

$$\frac{1}{h}[\varphi(t)-\varphi(t-h)]$$

$$=\frac{1}{h}[\alpha(e^tU(t)B)-\alpha(e^{t-h}V(t-h)B)]$$

$$\leqslant\alpha(\frac{1}{h}\{e^tu(t,x)-e^{t-h}u(t-h,x)|\ x\in B\})$$

$$\leqslant\alpha(\overline{CO}\bigcup_{s\in I_h}\{(e^su(s,x))'|x\in B\})$$

$$=\alpha(\bigcup_{s\in I_h}\{e^su(s,x)+e^su'(s,x)|x\in B\})$$

$$=\alpha(\bigcup_{s\in I_h}\{e^sAu(s,x)|x\in B\})$$

$$=\alpha(\bigcup_{s\in I_h}e^sAU(s)B)$$

$$\leqslant\alpha(e^t\bigcup_{s\in I_h}AU(s)B)+2(e^t-e^{t-h})\cdot\sup\{\|Ax\|\,|x\in D\}.$$

令$h\to 0^+$，得

$$D^-\varphi(t)\leqslant ke^t\lim_{h\to 0^+}\alpha(\bigcup_{s\in I_h}U(s)B)=k\varphi(t).$$

注意到$\varphi(0)=\alpha(B)$，故由上式可得

$$\varphi(t)\leqslant e^{kt}\alpha(B),$$

因此

$$\alpha(U(t)B)\leqslant e^{-(1-k)t}\alpha(B)_{\circ} \qquad (12.2.9)$$

注意到 $e^{-(1-k)t}<1$（$t>0$ 时），故由定理9.1.1可知对任给 $p>0$，$U(p)$ 在 D 中有不动点 x_p。这表明 $u(\cdot,x_p)$ 是周期为 p 的抽象函数。

取一串 $p_n>0$，使 $p_n\to 0$。令

$$u_n(t)=u(t,x_{p_n}),$$

$$z_n=\frac{1}{p_n}\int_0^{p_n}u_n(s)ds$$

$$v_n(t)=\begin{cases}u_n(t)-z_n, & t\geqslant 0\text{ 时}\\ v_n(t+(i+1)p_n), & t\in(-(i+1)p_n,-ip_n]\text{ 时}\end{cases}$$

（$i=0, 1, 2, \cdots$）。显然，$v_n(t)$ 是周期为 p_n 的抽象周期函数，并且

$$\|v_n(t)-v_n(s)\|\leqslant L|t-s|, \qquad (12.2.10)$$

这里 $L=\sup\{\|x-Ax\| \mid x\in D\}$。由 $v_n(t)$ 的定义知

$$\int_0^{p_n}v_n(s)ds=0. \qquad (12.2.11)$$

固定 n 和 t，在 $\left[t-\frac{p_n}{2}, t+\frac{p_n}{2}\right]$ 上积分恒等式

$$v_n(t)=v_n(s)+[v_n(t)-v_n(s)],$$

并利用(12.2.10)、(12.2..11)两式，得

$$p_n\|v_n(t)\|\leqslant\left|\int_0^{p_n}v_n(s)\,ds\right|$$

$$+L\int_{t-\frac{p_n}{2}}^{t+\frac{p_n}{2}}|t-s|ds=\frac{L}{4}p_n^2.$$

从而 $\|v_n(t)\| \leqslant \frac{L}{4} p_n$. 这表明

$$\lim_{n\to\infty} \max_{t\in R} \|v_n(t)\| = 0. \tag{12.2.12}$$

令 $B=\{z_n | n\geqslant 1\}$, $C=\{xp_n | n\geqslant 1\}$. 由(12.2.9)式可知

$$\alpha(B)=\alpha(U(t)C)\leqslant e^{-(1-k)t}\alpha(C).$$

令 $t\to+\infty$, 得 $\alpha(B)=0$. 所以$\{z_n\}$必有子列，不失一般可以假定就是$\{z_n\}$本身，收敛于某 $z\in E$. 利用(12.2.12) 式即可知 $u_n(t)$在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛于z. 注意到 $u_n(t)$ 是 初值问题 (12.2.8) 的解，所以 $u(t)\equiv z$ 是初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au - u \\ u(0) = z \end{cases}$$

的解. 这表明$Az=z$, z是A的不动点. □

定理12.2.4 设E是Banach 空间,D是E中的有界凸闭集，$A: D\to E$满足局部 Lipschitz 条件，并且对 D中的任意有界子集B, $\alpha(B)\neq 0$, 有

$$\alpha(A(B))<\alpha(B).$$

又设A满足边界条件(12.2.2). 则A在D中必有不动点.

证 取 $k_n\in(0,1)$, $k_n\to 1$, 令$A_n=k_nA$.不失一般可以假定$\theta\in D$. 下证 A_n 也满足边界条件 (12.2.2). 由 A 满足边界条件(12.2.2)及定理5.1.1可知,若 $x\in\partial D,\varphi\in E^*,\varphi(x)=\sup\limits_{y\in D}\varphi(y)$, 就必有

$$\varphi(Ax-x)\leqslant 0. \tag{12.2.13}$$

由 $\theta\in D$ 知 $\varphi(x)=\sup\limits_{y\in D}\varphi(y)\geqslant 0$; 由(12.2.13)式知

$$\varphi(A_nx)=\varphi(k_nAx)\leqslant\varphi(k_nx)\leqslant\varphi(x).$$

从而 $\varphi(A_n x-x)\leqslant 0$．再利用定理5.1.1即可知 A_n 也满足边界条件(12.2.2)。显然 A_n 也是局部 Lipschitz 映射．从而根据定理12.2.3，对每个 n，都存在 $x_n\in D$，使 $x_n=k_n Ax$。令 $B=\{x_n\}$，则

$$\alpha(B)=\alpha(\{k_n Ax_n\})\leqslant\alpha(A(B)).$$

根据定理条件可知必有$\alpha(B)=0$，从而 $\{x_n\}$ 有子列收敛于某 $x^*\in D$。显然 x^*是A的不动点。□

12.3 对非线性特征值问题的应用

在本节中，我们总设H是实 Hilbert 空间，$f: H\to R^1$，$g: H\to R^1$是两个连续可微泛函，满足：

(i)对某 $r>0$，$M_r=\{x\in H\,|\,f(x)=r\}$ 非空有界；

(ii)存在 $\rho>0$，$L>0$，使得对一切 $u\in M_r$，都有

$\|f'(x)-f'(y)\|\leqslant L\|x-y\|, \forall x,\ y\in\{z\in H\,|\,\|z-u\|\leqslant\rho\}$；

(iii)存在$\alpha>0$，使得

$$(f'(x),x)\geqslant\alpha,\quad \forall x\in V,$$

并且$f'(V)$有界，其中$V=\bigcup_{u\in M_r}\{z\in H\,|\,\|z-u\|\leqslant\rho\}$；

(iv) $g'(Mr)$有界，并存在连续增函数$d: R^+\to R^+, d(0)=0$，使得对一切 $u\in M_r$，都有

$$\|g'(x)-g'(u)\|\leqslant d(\|x-u\|),$$
$$\forall x\in\{z\in H\,|\,\|z-u\|\leqslant\rho\}.$$

定理12.3.1 设上述假设(i)～(iv)成立，则对任给 $\varepsilon>0$，都存在 $x_\varepsilon\in M_r$，使得

$$g(x_\varepsilon)\geqslant\sup_{x\in M_r}g(x)-\varepsilon,\tag{12.3.1}$$

$$\|Q(x_\varepsilon)\|<\varepsilon, \qquad (12.3.2)$$

其中Q由

$$Q(x)=g'(x)-\frac{(g'(x),x)}{(f'(x),x)}f'(x),\ x\in M_r \qquad (12.3.3)$$

定义.

证　用反证法，设定理的结论不成立，则存在$\varepsilon_0>0$，使得对一切满足

$$g(x)\geqslant c-\varepsilon_0 \qquad (12.3.4)$$

的 $x\in M_r$，都有$\|Q(x)\|\geqslant\varepsilon_0$，其中 $c=\sup\limits_{x\in M_r} g(x)$. 对某个$0<\beta<\varepsilon_0$（$\beta$将在后边给予确定），取 $x_0\in M_r$，使

$$g(x_0)\geqslant c-\beta, \qquad (12.3.5)$$

并取 $h\in H$，$\|h\|=1$，使

$$(Q(x_0),h)\geqslant\frac{\varepsilon_0}{2}. \qquad (12.3.6)$$

令

$$Fx=\frac{(f'(x),h)}{(f'(x),x)}x.$$

考察 Hilbert 空间上的常微分方程初值问题

$$\begin{cases} x'=h-Fx, \\ x(0)=x_0. \end{cases} \qquad (12.3.7)$$

由假设(ii)(iii)可知存在常数 $c_1>0$，$c_2>0$，使得

$$\|Fx-Fy\|\leqslant c_1\|x-y\|,$$

$$\|h-Fx\|\leqslant c_2$$

对一切 x，$y\in\{z\in H\mid\|z-x_0\|\leqslant\rho\}$ 成立. 因此，初值问题(12.3.7) 在$\left[0,\dfrac{\rho}{c_2}\right]$上有唯一解 $x(t)$. 由于

$$\frac{d}{dt}f(x(t))=(f'(x(t)),\ x'(t))=0,$$

$$f(x(0))=r$$

故 $f(x)(t))\equiv r$，即 $x(t)\in M_r$ $\left(\forall t\in\left[0,\ \frac{\rho}{c_2}\right]\right)$

令 $y(s)=x_0+s(x(t)-x_0)$，则有

$$g(x(t))-g(x_0)=\int_0^1(g'(y(s)),\ x(t)-x_0)ds$$

$$=\int_0^t\left(\int_0^1 g'(y(s))\,ds,\ x'(\tau)\right)d\tau$$

$$\geqslant\int_0^t(g'(x_0),x'(\tau))d\tau-c_2t\sup_{s\in[0,1]}\|g'(y(s))$$

$$-g'(x_0)\|. \qquad (12.3.8)$$

对$(g'(x_0),x'(\tau))$，我们有下列估计：

$$(g'(x_0),x'(\tau))=(g'(x_0),h)-\frac{(f'(x(\tau)),h)}{(f'(x(\tau)),x(\tau))}$$

$$(g'(x_0),\ x(\tau))$$

$$\geqslant(Q(x_0),h)-\left\|\frac{(f'(x(\tau)),h)}{(f'(x(\tau)),x(\tau))}(g'(x_0),\right.$$

$$\left.x(\tau))-\frac{(g'(x_0),x_0)}{(f'(x_0),x_0)}(f'(x_0),h)\right\|. \qquad (12.3.9)$$

利用定理的条件(ii)～(iv),通过简单的运算,即可由（12.3.9）式得到

$$(g'(x_0),\ x'(\tau))\geqslant(Q(x_0),h)-c_3\|x(\tau)-x_0\|$$

$$\geqslant(Q(x_0),h)-c_3c_2\tau,$$

其中c_3是一常数。于是，由(12.3.8)式并利用假设(iv)，可得

$$g(x(t))\geqslant c-\beta+\frac{\varepsilon_0}{2}t-\frac{c_2c_3}{2}t^2-c_2td(c_2t). \qquad (12.3.10)$$

由假设(ii)～(iv)可知 c_1, c_2, c_3 均与 x_0 无关。于是可取 t_1 充分小，使

$$\delta(t_1)=t_1\left(\frac{\varepsilon_0}{2}-\frac{c_3c_3}{2}t_1-c_2d(c_2t_1)\right)>0.$$

取 β，使 $0<\beta<\min\{\varepsilon_0,\delta(t_1)\}$，则由(12.3.10)式可知

$$g(x(t_1))\geqslant c-\beta+\delta(t_1)>c.$$

注意到 $x(t_1)\in M_r$，故上式与 c 的定义矛盾。 □

利用定理12.3.1,可知在该定理的条件下,必存在 $x_n\in M_r$，使 $Q(x_n)\to\theta$。在某些适当的条件下，由 $Q(x_n)\to\theta$ 可以得到非线性特征值问题

$$g'(x)=\lambda f'(x)$$

的存在性定理。下面我们考虑一个最重要的特殊情况，即

$$f(x)=\frac{1}{2}\|x\|^2 \tag{12.3.11}$$

的情况。在这种情况下，$f'(x)=x$。

定理12.3.2 设 g'：$H\to H$ 是强连续的（即 g' 把 H 中的弱收敛序列映为强收敛序列），并且存在连续增函数 $d: R^+\to R^+$，$d(0)=0$，使对任给 $x,y\in H$，有

$$\|g'(x)-g'(y)\|\leqslant d(\|x-y\|)$$

又设存在 $R>0$，使

$$\inf_{\|x\|=R}\|g'(x)\|>0. \tag{12.3.12}$$

则存在 $x^*\in H$，$\|x^*\|=R$，$\lambda^*\neq 0$，使 $g'(x^*)=\lambda^*x^*$。

证 令 $r=\frac{1}{2}R^2$，则对 $f(x)=\frac{1}{2}\|x\|^2$ 和上述 $g(x)$，定理12.3.1的条件满足。故根据定理12.3.1，存在 $x_n\in H$，$\|x_n\|=R$，使

$$g'(x_n)-\frac{(g'(x_n),x_n)}{\|x_n\|^2}x_n\to\theta.$$

不失一般，设 x_n 弱收敛于x^*，$\frac{(g'(x_n),x_n)}{\|x_n\|^2}$收敛于 λ^*，从而由g'的强连续性知

$$g'(x^*)-\lambda^* x_n\to\theta$$

由(10.3.12)式知 $\lambda^*\neq 0$，从而 $x_n\to\frac{1}{\lambda^*}g'(x^*)$。注意到 x_n 弱收敛于x^*，所以必有$g'(x^*)=\lambda^* x^*$，并且显然有$\|x^*\|=R$。证完。□

12.4 附　　注

利用 Banach 空间常微分方程研究临界点理论，可见郭大钧〔1〕。定理12.1.2是著名的山路引理（Mountain Pass 引理）的一个变形，这里采用的证明方法是孙经先〔1〕中提出的。定理12.1.3和定理12.1.4是孙经先〔1〕〔2〕中提出并加以证明的。

利用 Banach 空间微分方程作为工具用于证明不动点定理的工作（12.2节中的几个定理及其有关的进一步讨论）可见 Deimling〔1〕。关于定理12.3.1及其进一步讨论，见 Naumann〔1〕。

关于 Banach 空间常微分方程理论的其他应用，可见 Deimling〔1〕，Martin〔1〕，Lakshmikantham 和 leela〔2〕。

参考文献

郭大钧 〔1〕非线性泛函分析，山东科学技术出版社，1985.
〔2〕非线性算子方程的正解及其对非线性积分方程的应用，数学进展，13(1984)，294～310.

郭大钧 (Guo Dajun) & V. Lakshmikantham〔1〕Coupled fixed point of nonlinear operators with applications, Nonlinear Anal., 11(1987), 623～632. 〔2〕Multiple solutions of two-point boundary value problems of ordinary differential equations in Banach spaces, J.Math.Anal.Appl., 129(1988), 211～222.〔3〕Nonlinear problems in Abstract Cones, Academic Press Boston, New York, 1988.

郭大钧、孙经先〔1〕非线性积分方程，山东科学技术出版社，1987.

孙经先 〔1〕临界点理论中的Schauder条件，科学通报，31(1986), 328～331.〔2〕关于非线性算子的若干问题，山东大学博士学位论文，1984年10月.〔3〕非连续的增算子的不动点定理及其对含间断项的非线性方程的应用，数学学报，31(1988)，101～107.〔4〕Banach空间中某些新的列紧性判别法及其应用，数学年刊（待发表）.〔5〕自反空间中正规锥与全正则锥的等价性，科学通报，29(1984)，382.〔6〕增算子的不动点和广义不动点，数学学报，

32(1989)(待发表).

孙经先、孙勇 (Sun Jingxian & Sun Yong) [1] Some fixed point theorems of increasing operators, Appl. Anal., 23 (1986), 23~27.

胡守川 (Hu Shouchuan) [1] Ordinary differential equations involving perturbations in Banach spaces, Nonlinear Anal., 7(1983), 933~940.

陈建功 [1] 实函数论，科学出版社，1958.

S.B.Agase [1] Existence and stability of ordinary differential equations in locally convex space, Nonlinear Anal., 5(1981), 717~719.

V.Barbu [1] Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces, Noordhoff international publishing Leyden, The Netherlands printed in 1976.

Ph.Benilan [1] Solution integrales d'equations d'evolution dans un espace de Banach, C.R.Acad. Sci., 274(1972), 47~50.

[2] Equations d'evolution dans un espace de Banach quelconque et applications, These Orday, 1972.

Ph. Benilan & H. Brezis [1] Solutions faibles d'equations d'evolution dans les espaces de Hilbert, Ann. Inst. Fourier 22(1972), 311~329.

S.R.Bernfeld & J. Chandra [1] Minimal and maximal solutions of nonlinear boundary value problems, Pacific J. Math., 71(1977), 13~20.

S. R. Bernfeid, T. G. Hallam & V. Lakshmikantham [1] Asymptotic equivalence of nonlinear differential equations in Banach spaces, SIAM J. Anal., 6(1975) 140～145.

S.R.Bernfeld & V.Lakshmikantham [1] Monotone methods for nonlinear boundary value problems in Banach spaces,Nonlinear Anal., 3(1979),303～316.

H.Brezis [1] On a characterization of flow-invariant sets,Comm.Pure Appl.Math.,223(1970), 261～263.

H.Brezis & A.Pazy [1] Semigroups of nonlinear contractions on convex sets,J.Funct. Anal. , 6(1970), 367～383.

F.E.Browder [1] Nonlinear operators and nonlinear equations of evolution in Banach spaces, Proc. Sympos. Pure Math. , Vol. 18 II, Amer. Math. Soc. , 1976.

N.P.Cac & J.A.Gatica, [1] Fixed point theorems for mappings in ordered Banach spaces, J. Math.Anal. Appl. , 71(1979), 547～557.

J.Chandra, V.Lakshmikantham & S. Leela [1] A monotone method for infinite systems of nonlinear boundary value problems, Arch. Rat. Mech. Anal., 68(1978), 179～190.

J.Chandra, V.Lakshmikantham & A.R.Mitchell [1] Existence of solutions of boundary value problems for nonlinear second order systems in a Banach space,

Nonlinear Anal., 2(1978), 157~168.

M.G.Crandall & T.M.Liggett [1] Generation of semi-groups of nonlinear transformations on general Banach spaces,Amer.J.Math.93(1971),265~298.

M. G. Crandall & A.Pazy [1] Nonlinear evolution equations in Banach spaces, Israel J. Math. , 11(1972), 57~94.

K.Deimling [1] Ordinary differential equations in Banach spaces, Springer-Verlag, 1977. [2] Nonlinear functional analysis, Springer-Verlag, 1985. [3] On existence and uniqueness for differential equations, Ann. Mat. Pura Appl, 106(1975), 1~12. [4] On approximate solutions of differential equations in Banach spaces,Math.Ann., 212(1974),79~88.

K.Deimling & V.Lakshmikantham[1]On existence of extremal solutions of differential equations in Banach space, Nonlinear Anal. , 3(1979), 563~568. [2] Existence and comparison theorems for differential equations in Banach space,Nonlinear Anal, 3(1979),569~575.

S.W. Du & V.Lakshmikantham [1] Monotone iteration technique for differential equations in a Banach spaces,J.Math.Anal.Appl.,87(1982),454~459.

J. Dugundji [1] An extension of Tietzes theorem, Pacific J. Math., 1(1951),353~367.

N.Dunford & J.T. Schwartz [1] Linear operators, Part I, Interscience publishers Inc.,New York, 1958.

R.E.Edwards [1]Functional Analysis, New York, 1965.

J. Eisenfeld & V. Lakshmikantham [1] Comparison principle and nonlinear contractions in abstract spaces, J.Math.Anal.Appl.,49(1975), 504~511.

G. D. Faulkner [1] On the nonexistence of weak solutions to abstract differential equations in nonreflexive spaces,NonlinearAnal,2(1978), 505~508.

R. B. Holmes [1] A course on optimization and best approximation,Lect.Notes 257,Springer-Verlag 1972.

Y.Komura [1] Nonlinear semigroups in Hilbert spaces, J. Math. Soc. Japan, 19(1967), 493~507.

G.E.Ladas, G.S.Ladde & V. Lakshmikantham [1] On some fundamental properties of solutions of differential equations in a Banach space, Ann. di Math. Pura ed Appl., 95(1973), 255~267.

G.E.Ladas & V. Lakshmikantham [1] Global existence and asymptotic equilibrium in Banach spaces,J.Ind. Math. Soc. , 36(1972), 33~40. [2] Differential equations in Abstract Spaces, Academic Press, New York, 1972.

G.S.Ladde & V.Lakshmikantham [1] On flow-invariant sets, Pacific J. Math. , 51(1974), 215~220.

V.Lakshmikantham [1] Differential equations in Banach spaces and extension of Lyapunov's method, Proc. Camb.Phi.Soc.,59(1963),373~381. [2] Stability and asymtotic behavior of solutions of differential equa-

tions in a Banach space, Lecture Notes, C.I.M.E., Italy, (1974), 39～98.
V. Lakshmikantham & S. Leela [1] Differential and integral inequalities, Vol. I and II. Academic Press, New York, 1969. [2] Nonlinear differential equations in abstract spaces, Pergamon Press, New York, 1981.
V. Lakshmikantham, S. Leela & V. Moauro [1] Existence and uniqueness of solutions of delay differential equations on a closed subset of a Banach space. Nonlinear Analysis, 2(1978), 311～327.
V. Lakshmikantham, S. Leela & M. N. Ogustoreli [1] Quasi-solutions, vector Lyapunov functionals and monotone method, IEEE Trans. Automa. Control, 26(1981), 1149～1153.
V. Lakshmikantham, S. Leela & A. S. Vatsala [1] Monotone iterative techniques for nonlinear differential equations, London, 1985. [2] Method of quasi upper and lower solutions in abstract cones, Nonlinear Anal., 6(1982), 833～838.
V. Lakshmikantham, A. R. Mitchell & R. W. Mitchell, [1] Maximal and minimal solutions and comparison results for differential equations in abstract cones, Ann. Polon Math., 34(1977), 97～104.
V. Lakshmikantham, A. R. Mitchell & D. Sety [1] Method of quasi-linearization and positivity of solutions in

abstract cone, J. Optimiz. Theory & Appl., 22(1977), 353～372.

S. Leela & V. Moauro〔1〕Existence of solutions of delay differential equations on closed subset of a Banach space, Nonlinear Analysis, 2(1978), 47～58.

N. G. Lloyd 〔1〕 Degree theory, Camb. Univ. Press, 1978.

R. H. Martin, Jr. 〔1〕Nonlinear operators and differential equations in Banach spaces, John Wiley & Sons, New york, 1976.〔2〕Differential equations on closed subsets of a Banach space, Trans. Amer. Math. Soc., 179(1973), 399～414.

A. R. Mitchell & R. W. Mitchell 〔1〕 Asymptotic equilibrium of ordinary differential systems in a Banach space. Math. Syst. Theory, 9(1976), 308～314.

J. Naumann 〔1〕 Remark on nonlinear eigenvalue problems, in "Theory of nonlinear operators" , 61～84, Acad. Press, New York, 1973.

J. Neustupa〔1〕A contribution to the theory of stability of differential equations in Banach space, Czechoslovak Math. J., 29(1979), 27～52.

A. J. B. Potter, 〔1〕 A fixed point theorem for positive k-set contractions, Proc. Edinburgh Math. Soc., (2)19(1974), 93～102.

R. M. Redheffer 〔1〕 The theorem of Bony and Brizis on flow invariant sets. Amer. Math. Monthly,

79(1972), 740~747. [2] Gewohnliche differential ungleichunfen mit quasımonotonen funktionen ın normierten linearen raumen, Arch. Rat. Mech. Anal., 52(1973),121~133.

K.Schmitt & P.Volkmann [1] Boundary value problems for second order differential equations ın convex subset of a Banach space, Trans. Amer. Math. Soc., 218(1976), 397~405.

A.Szep [1] Existence theorem for weak solutions of ODEs in reflexive Banach spaces,Studia.Sci.Math. Hungarica, 6(1971), 197~203.

R.C.Thompson [1]An ınvariance property of solutions to second differential inequalities in order Banach spaces, SIAM Math. Anal., 8(1977),592~603.

P.Volkmann [1]Uber dıe invarianzsatze von Bony und Brezis in normıerten Raumen, Archiv Math., 26(1975), 89~93. [2] Uber die posıtive invarianz einer abgeschlossenen teilmenge eines Banachschen Raumes bezuglich der differentialgleıchung u′=f(t, u), J. Reine Angew. Math., 285 (1976), 59~65. [3] Gewonliche differentialungleichunger mıt quasimonoton wachsenden funktionen in topologıschen vektor raumen, Math.z., 127(1972), 157~164.

G.Webb [1] Nonlinear evolution equations and produce integration in Banach spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 148(1970), 273~282. [2] Accretive

operators and existence for nonlinear functional differential equations, J. Diff. Eqs., 14(1973), 57～69.

W.R.Zigler [1] On the theory of differential equations in the weak topology of a reflexive Banach space, Dissertation, Univ.of South Florida, 1975.